

电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程

电磁场与电磁波基础

(第2版)

刘 岚 黄秋元 程 莉 胡耀祖 编著

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是按照电子信息与电气类专业“电磁场与电磁波”课程教学的基本要求,本着深入浅出、通俗易懂的原则而编写的。为了更适合于电子信息与电气类专业学生的学习,本书在给出了“场”的基本方程和一般概念与分析方法后,重点着墨于“波”的基本特性与传播过程分析。

本书共分 11 章,主要内容包括:矢量分析与场论,电场、磁场与麦克斯韦方程,介质中的麦克斯韦方程,矢量位与标量位,静态场的解,自由空间中的电磁波,非导电介质中的电磁波,导电介质中的电磁波,波的反射与折射,等等。本书最后对电磁波的导引和辐射进行了简要的介绍。每章之后均附有本章小结和丰富的习题,书末附有大部分习题参考答案。

本书可作为普通高等院校通信工程、电子信息工程、电子科学与技术、自动化、电气工程及其自动化等专业的本科生教材,也可供从事“电磁场与电磁波”方向的工程技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波基础 / 刘岚等编著. —2 版. —北京:电子工业出版社, 2010.7

电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础教程

ISBN 978-7-121-11188-4

I. ①电… II. ①刘… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 119664 号

策划编辑:段丹辉

责任编辑:段丹辉

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:18.5 字数:498 千字

印 次:2010 年 7 月第 1 次印刷

印 数:4000 册 定价:32.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

电磁场与电磁波理论是近代自然科学中，理论相对最完整、应用最广泛的支柱学科之一。电磁场与电磁波技术已遍及人类的科学技术、政治、经济、军事、文化及日常生活的各个领域。

目前，“电磁场与电磁波”是电子信息与电气类专业学生必修的一门重要的专业基础课程，它所涉及的内容是电子信息与电气类专业学生知识结构的必要组成部分。通过该课程的学习，可使学生在建立场与路的统一认识的基础上，从集总参数电路理论过渡到分布参数的高频电路理论，为学习半导体技术、光电子技术、微波技术、天线理论、光纤通信、移动通信等专业课程或从事电磁工程研究奠定必要的基础。尤其是在当今光电子与信息技术高速发展的时代，不断升高的工作频率或信号速率成为了电子产品开发中不可忽视的技术前提，这时许多技术问题用集总参数电路的理论已难以解决，而必须使用场和波的观点才能得到完整的解释，电磁技术成为了光电子产品性能的决定因素。在光电子与通信领域中，不管是光还是电子、有线通信还是无线通信、数字通信还是模拟通信，在频率较高或信号速率较高时，其信号在信道中的传输与处理过程都离不开电磁场与电磁波的理论知识。

但是，由严密的数学推证、精确的实验和科学的抽象所构成的电磁场与电磁波理论却实在是一门既难教又难学的课程，它在数学方法和物理概念不断相互交融中所表现出来的轮廓和内涵，常常会令人感到望而生畏，从而使学生难以提高学习兴趣。

数年来，我们一直希望能出版一本既通俗易懂，又重点突出的教材，这里要突出的重点就是与电气信息类专业较为密切的电磁波学。虽然，电磁场与电磁波密不可分，但是在给出场的基本概念后，我们希望能围绕着波的理论进行较为广泛和深入的探讨，本书就是在这样的指导思想下编写的。2006年，我们出版了本书的第一版，通过几年的使用，发现了一些问题，同时也积累了一些经验，希望这次修订能够弥补不足，使本书的质量得到进一步的提升。本书在这次修订过程中融入了如下的考虑：

(1) 在学生已有的理论基础上由浅入深展开教学，强调基础，重视基本概念，并及时总结，让学生感到经过努力，能够掌握所学内容，从而增强学生的学习信心；

(2) 从各个不同角度反复强调基本理论和计算公式的适用条件，帮助学生建立清晰的物理概念，并培养学生良好的科学习惯，避免学生盲目套用公式；

(3) 处处以麦克斯韦方程组这一描述宏观电磁现象的基本理论为指导，对一些宏观电磁现象和问题进行定性分析与定量计算，培养学生正确的思维方法和分析问题的方法，提高学生运用理论解决实际问题的能力；

(4) 帮助学生掌握“类比”这一科学的分析方法，使学生不断巩固所学内容，缩短新内容的学习过程；

(5) 在内容编排中，既有从特殊到一般的归纳方法，又有从一般到特殊的演绎方法，既能使学生易于接受新内容，又能培养学生的抽象思维能力；

(6) 紧跟时代步伐，调整教学内容，使学生看到科学技术的不断发展，产生努力学习的紧迫感。

本书的编写借助了国内外优秀教材的成功之处,以及编者在教学和研究方面所积累的经验。本书有如下特点:

- (1) 以场的理论为基础进行分析,以波的特性为重点展开论述;
- (2) 采用不同的论述体系。从力的类比入手引入场,从大学物理的基础导出电磁场与电磁波的基本理论和基本方程;
- (3) 强调并引入位函数,同时以静态场为例介绍位场的求解方法;
- (4) 在不同的介质条件下反复分析场与波的基本规律;
- (5) 结合工程实际情况,对波的产生、导波及辐射进行分析讨论。

本书共分 11 章,主要内容包括:矢量分析与场论,电场、磁场与麦克斯韦方程,介质中的麦克斯韦方程,矢量位与标量位,静态场的解,自由空间中的电磁波,非导电介质中的电磁波,导电介质中的电磁波,波的反射与折射,导行电磁波,辐射系统,等等。本书最后对电磁波的导引和辐射进行了简要的介绍。每章之后均附有小结和习题,书末附有大部分习题答案。

本书适用于 48~64 教学学时,任课教师可根据具体情况决定内容取舍。为方便教师教学和读者自学,本书配有免费电子教学课件,可登录华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)免费注册下载或发送电子邮件至 duandh@phei.com.cn 向本书的责任编辑索取。此外,为选用本书作为教材的任课老师免费提供课后习题的详细解题过程。欢迎任课教师及时反馈授课心得和建议。

本书由武汉理工大学刘岚教授负责统稿。其中,第 6~9 章和第 11 章由刘岚编写,第 1 章和第 5 章由黄秋元编写,第 2~4 章由程莉编写,第 10 章由胡耀祖编写。

本书承华中科技大学杨晓非教授主审,并经武汉大学胡钊教授审阅,他们提出了不少有益的建议和宝贵意见,在此一并表示诚挚的感谢。

限于编者的水平和经验,书中难免存在错误和不妥之处,敬请广大读者批评指正。作者的联系方式: whekon@163.com。

编 者
2010 年 6 月于武汉

本书符号说明

a	半径(m)
A	面积(m ²)
\boldsymbol{a}	任意矢量
\boldsymbol{A}	矢量位(Wb/m, 韦伯每米)
b	直径(m)
\boldsymbol{b}	任意矢量
\boldsymbol{B}	磁场矢量(T, 特斯拉); 磁感应强度矢量; 磁通密度矢量
\boldsymbol{B}_0	恒定磁场矢量
\boldsymbol{B}'_0	反射波中的恒定磁场矢量
\boldsymbol{B}''_0	透射波中的恒定磁场矢量
c	自由空间中的光速
C	电容(F, 法拉第); 任意标量
\boldsymbol{c}	任意矢量
\boldsymbol{D}	电位移矢量(C/m ²)或称为电通量密度矢量
E	电动势
e_E	电源的电动势
\boldsymbol{e}_x	x 轴方向的单位矢量
\boldsymbol{e}_y	y 轴方向的单位矢量
\boldsymbol{e}_z	z 轴方向的单位矢量
\boldsymbol{e}_r	r 增量方向的单位矢量
\boldsymbol{e}_θ	θ 增量方向的单位矢量
\boldsymbol{e}_φ	φ 增量方向的单位矢量
\boldsymbol{e}_n	法线方向的单位矢量
\boldsymbol{E}	电场矢量(V/m)
\boldsymbol{E}_0	恒定电场矢量
\boldsymbol{E}'_0	反射波中的恒定电场矢量
\boldsymbol{E}''_0	透射波中的恒定电场矢量
f	频率(Hz); 可变函数
f_c	截止频率; 极限频率(Hz)
\boldsymbol{F}	力矢量(N, 牛顿)

(续)

g	天线增益；可变函数
\boldsymbol{H}	磁场强度矢量(A/m)
i	$\sqrt{-1}$
I	电流(A，安培)
\boldsymbol{J}	电流密度矢量(A/m ²)
\boldsymbol{J}_f	自由电流密度矢量(A/m ²)
\boldsymbol{J}_b	极化电流密度(A/m ²)
\boldsymbol{J}_c	传导电流密度矢量(A/m ²)
\boldsymbol{J}_v	运流电流密度矢量(A/m ²)
\boldsymbol{J}_d	位移电流密度矢量(A/m ²)
\boldsymbol{J}_m	磁化介质中的电流密度(A/m ²)
\boldsymbol{J}_J	雅可比行列式
k	传播常数
k_x	传播矢量的 x 分量
k_y	传播矢量的 y 分量
k_z	传播矢量的 z 分量
\boldsymbol{k}	传播矢量(幅值为 K)
\boldsymbol{k}'	反射波的传播矢量
\boldsymbol{k}''	透射波的传播矢量
K_w	行波系数
l	电偶极子的长度(m)
L	自由电荷的位移(m)
m	电荷 q 的质量(kg)；整数
\boldsymbol{M}	单位体积介质的磁化强度(A/m)
n	折射率；整数
n_l	折射率的虚部
n_r	折射率的实部
N	介质的每单位体积中分子、原子或电荷的数量
p_e	电偶极矩(C·m)
p_m	磁偶极矩(C·m)
\boldsymbol{P}	每单位体积的电极化强度(C/m ²)
q	电荷(C)
Q	电荷的总量(C)

(续)

R_r	天线的辐射电阻(Ω)
r	从参考原点到场点的矢量(m)
r_p	从参考原点到电荷点的矢量
r'_p	从参考原点到延迟电荷位置的矢量
R	从电荷位置到场点的矢量
R'	从延迟电荷位置到场点的矢量
R_p	$r_p - r'_p$ ，从延迟电荷到当前电荷或电流位置的矢量
R	电阻；反射系数
$R_{//}$	平行极化波的电场反射系数
R_{\perp}	垂直极化波的电场反射系数
S	表面积(m^2)
S_w	驻波系数(VSWR)
S_{av}	熵 [$J/(k \cdot mol)$]；平均坡印廷矢量(W/m^2)
S	坡印廷矢量(W/m^2)
S_{en}	电磁能量密度(J/m^3)
\bar{S}_{en}	平均电磁能量密度(J/m^3)
t	时间(s，秒)
t'	延迟时间(s，秒)
T	温度(K，开尔文)
T_c	居里温度
$T_{//}$	平行极化波的电场折射系数
T_{\perp}	垂直极化波的电场折射系数
u	能量(J)；标量
U	电压(V，伏特)；每单位体积的能量(J/m^3)
v	速度；电磁波的相速(m/s)
v_p	电磁波的相速(m/s)
v_{en}	电磁波的能量速度(m/s)
v'	电荷的延迟速度(m/s)
V	体积(m^3)
W	功率(W，瓦特)
W_0	天线或自由电荷辐射的功率
W'_0	束缚电荷辐射的功率
W_i	平面电磁波每单位面积上的功率
x, X	笛卡儿坐标系

(续)

y, Y	笛卡儿坐标系
z, Z	笛卡儿坐标系
x', y', z'	移动电荷的延迟坐标
α_p	分子或原子的极化率
α (alpha)	衰减系数
β (beta)	任意常数; 相位系数
γ (gamma)	电导率(S/m)
Γ (gamma)	闭合曲线; 传播系数
δ (delta)	渗透深度(m)
ε (epsilon)	介电系数
ε_r	介质的相对介电系数
ε_0	自由空间的绝对介电系数, $\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
θ (theta)	角度
λ (lambda)	波长(m)
χ_m (chi)	磁化率
μ (mu)	磁导率(H/m)
μ_r	介质的相对磁导率
μ_0	自由空间的磁导率, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
π (pai)	$\pi \approx 3.14$
ρ (rho)	电荷体密度(C/m ³); 电压反射系数
σ (sigma)	表面电荷密度(C/m ²)
σ_l	线电荷密度(C/m)
σ_s	自由电荷的散射截面(m ²); 面电荷密度
σ'_s	束缚电荷的散射截面(m ²)
τ (tau)	衰减常数 α 的倒数
φ (phi)	角度
ϕ	电位、标量位(V)
Φ_e	电通量
Φ_m	磁通量
ω (omega)	角频率($\omega = 2\pi f$)
Ω (omega)	欧姆
ψ (psi)	波函数
η (yita)	本征阻抗

目 录

第 1 章 矢量分析与场论	(1)
1.1 矢量的表示和运算	(1)
1.1.1 矢量与标量	(1)
1.1.2 矢量的代数运算	(2)
1.1.3 标量场与矢量场	(4)
1.2 正交坐标系	(4)
1.2.1 正交坐标系的概念	(4)
1.2.2 笛卡儿坐标系	(5)
1.2.3 圆柱坐标系	(6)
1.2.4 球坐标系	(7)
1.2.5 三种坐标系中单位矢量之间的关系	(8)
1.3 矢量函数的通量与散度	(10)
1.3.1 矢量的通量	(10)
1.3.2 散度	(12)
1.3.3 高斯散度定理	(14)
1.4 矢量函数的环量与旋度	(15)
1.4.1 矢量的环量	(16)
1.4.2 矢量场的旋度	(16)
1.4.3 斯托克斯定理	(20)
1.5 标量函数的方向导数与梯度	(21)
1.5.1 标量场与等值面	(21)
1.5.2 方向导数	(21)
1.5.3 梯度	(22)
1.6 格林公式	(25)
1.7 亥姆霍兹定理	(26)
1.7.1 散度和旋度的比较	(26)
1.7.2 亥姆霍兹定理	(26)
1.8 矢量场的分类	(27)
本章小结	(28)
习题 1	(30)
第 2 章 电场、磁场与麦克斯韦方程	(33)
2.1 电场力、电场强度与电位	(34)
2.1.1 电场力与电场强度	(34)

2.1.2	电位	(35)
2.2	磁场力、磁感应强度与磁位	(36)
2.2.1	磁场力与磁感应强度	(36)
2.2.2	矢量磁位	(37)
2.2.3	标量磁位	(40)
2.3	洛伦兹力	(40)
2.4	电偶极子	(41)
2.5	磁偶极子	(43)
2.6	由电通量与高斯定律导出麦克斯韦第一方程	(46)
2.6.1	电通量	(46)
2.6.2	麦克斯韦第一方程	(46)
2.7	由电磁感应定律与斯托克斯定律导出麦克斯韦第二方程	(47)
2.8	由磁通量与高斯定律导出麦克斯韦第三方程	(47)
2.9	由安培环路定律与斯托克斯定律导出麦克斯韦第四方程	(48)
2.9.1	传导电流、运流电流和位移电流	(48)
2.9.2	电流连续性原理	(50)
2.9.3	麦克斯韦第四方程	(51)
2.10	微分形式的麦克斯韦方程组	(52)
2.11	麦克斯韦方程的积分形式	(54)
2.12	麦克斯韦方程的时谐形式	(56)
2.13	电磁场的能量与坡印廷矢量	(57)
	本章小结	(61)
	习题 2	(62)
第 3 章	介质中的麦克斯韦方程组	(64)
3.1	分子模型	(64)
3.2	电介质及其极化	(65)
3.2.1	极化的概念	(65)
3.2.2	极化矢量 \mathbf{P}	(66)
3.2.3	介质的分子模型与极化矢量	(67)
3.2.4	高密度介质中的电场	(68)
3.2.5	考虑极化效应的麦克斯韦方程组	(70)
3.3	折射率与相对介电常数	(72)
3.4	介质的磁化	(74)
3.4.1	磁化的概念	(74)
3.4.2	磁化电流与磁化矢量 \mathbf{M}	(74)
3.4.3	磁场强度	(74)
3.4.4	磁介质	(75)
3.5	介质中的麦克斯韦方程组	(76)
3.6	电磁场的边界条件	(77)

本章小结.....	(84)
习题 3.....	(86)
第 4 章 矢量位与标量位	(88)
4.1 矢量位 \mathbf{A}	(88)
4.2 标量位 ϕ	(88)
4.3 用位函数 ϕ 和 \mathbf{A} 表示的非均匀波动方程.....	(89)
4.4 利用场源 ρ 和 \mathbf{J} 求解位函数 ϕ 和 \mathbf{A}	(92)
4.5 李纳-维谢尔位函数.....	(94)
本章小结.....	(98)
习题 4.....	(99)
第 5 章 静态场的解	(100)
5.1 泊松方程和拉普拉斯方程	(100)
5.1.1 静态场中的麦克斯韦方程组.....	(100)
5.1.2 泊松方程和拉普拉斯方程	(102)
5.2 对偶原理	(105)
5.3 叠加原理和唯一性定理.....	(106)
5.3.1 边界条件的分类	(106)
5.3.2 叠加原理	(106)
5.3.3 唯一性定理.....	(107)
5.4 镜像法	(107)
5.4.1 点电荷与无限大平面导体的合成场计算	(107)
5.4.2 电介质分界面的镜像电荷	(109)
5.4.3 球形边界问题.....	(111)
5.4.4 圆柱形边界问题	(112)
5.5 分离变量法	(113)
5.5.1 笛卡儿坐标系中的分离变量法	(113)
5.5.2 圆柱坐标系中的分离变量法.....	(116)
5.6 格林函数法	(118)
5.6.1 静电场边值问题的格林函数法表达式.....	(119)
5.6.2 简单边界的格林函数.....	(121)
5.7 有限差分法	(122)
本章小结.....	(125)
习题 5.....	(126)
第 6 章 自由空间中的电磁波	(128)
6.1 波的数学描述	(128)
6.2 均匀平面波与三维波动方程	(129)
6.3 电波与磁波	(130)
6.4 自由空间中的平面电磁波	(131)
6.4.1 随时间变化的单色平面波	(132)

6.4.2 均匀平面电磁波的特性	(133)
6.5 波的极化	(136)
6.6 电磁波谱	(141)
本章小结	(143)
习题 6	(143)
第 7 章 非导电介质中的电磁波	(145)
7.1 非导电介质中的电磁波方程	(145)
7.2 平面电磁波在理想介质中的传播	(147)
7.3 平面电磁波在非理想介质中的传播	(148)
7.3.1 等效复介电系数	(148)
7.3.2 波动方程及其解	(149)
7.4 低密度气体中的电磁波	(150)
7.5 高密度介质中的电磁波	(152)
7.6 复数折射率的相关结论	(153)
7.7 相速与能流速度	(154)
7.8 色散	(157)
7.9 相速与群速	(158)
本章小结	(160)
习题 7	(160)
第 8 章 导电介质中的电磁波	(162)
8.1 导电介质的一般模型	(162)
8.2 导电介质在高频或低频时的特性	(163)
8.2.1 介质的折射率与导电介质的频率特性	(163)
8.2.2 导电介质的趋肤深度	(165)
8.2.3 导电介质的趋肤效应	(167)
8.3 导电介质中的电磁波	(169)
8.3.1 导电介质中波的传播特性	(169)
8.3.2 良导体中的均匀平面电磁波	(172)
8.4 等离子体对波的反射	(175)
本章小结	(177)
习题 8	(178)
第 9 章 电磁波的反射与折射	(179)
9.1 电磁波传播的边界条件	(179)
9.2 传播矢量	(182)
9.3 平面边界的反射与透射	(183)
9.4 反射波的极化	(191)
9.5 法向入射	(192)
9.6 全折射与全反射	(194)
9.6.1 全折射	(194)

9.6.2 全反射	(195)
9.7 反射波的相位变化	(196)
9.8 各向异性媒质中的平面电磁波	(197)
本章小结	(198)
习题 9	(200)
第 10 章 导行电磁波	(203)
10.1 电磁波在均匀导波装置中传播的一般特性	(203)
10.1.1 电磁波在均匀导波装置中的传播	(203)
10.1.2 均匀导波装置中的 TEM 波、TE 波和 TM 波	(205)
10.1.3 均匀导波装置中的导行波传输特性	(207)
10.2 TEM 传输线	(209)
10.2.1 传输线方程及其时谐稳态解	(209)
10.2.2 传输线的传输特性参数	(213)
10.2.3 无损耗传输线的工作状态	(215)
10.3 矩形波导	(221)
10.3.1 矩形波导中的 TM 波	(221)
10.3.2 矩形波导中的 TE 波	(222)
10.3.3 矩形波导中的 TE_{10} 波	(224)
10.4 圆柱形波导	(228)
10.4.1 圆柱形波导中的 TM 波	(228)
10.4.2 圆柱形波导中的 TE 波	(230)
10.5 导波系统中的功率传输与损耗	(232)
10.5.1 波导的功率传输和功率容量	(232)
10.5.2 波导的损耗和衰减	(233)
10.6 谐振腔	(235)
10.6.1 同轴谐振腔	(235)
10.6.2 矩形谐振腔	(236)
10.6.3 谐振腔的品质因素 Q	(237)
10.7 介质波导和光纤简介	(238)
10.7.1 介质波导	(238)
10.7.2 光纤	(238)
本章小结	(240)
习题 10	(241)
第 11 章 辐射系统简介	(242)
11.1 缓慢移动的加速点电荷的辐射	(242)
11.2 自由电荷的能量散射	(246)
11.3 束缚电荷辐射的散射	(247)
11.4 电偶极子天线的辐射	(248)
11.5 天线的辐射电阻	(250)

11.6 天线的增益..... (251)

11.7 磁偶极子天线的辐射 (251)

本章小结 (256)

习题 11 (256)

附录 A 一些有用的数学结论 (257)

附录 B 计算雅可比行列式 (261)

附录 C 矢量 D 、 H 、 E 、 B 、 P 、 M 之间的关系 (262)

附录 D 相关的国际单位..... (263)

附录 E 相关的物理常数 (264)

附录 F 中英文术语对照表 (266)

习题参考答案 (272)

参考文献..... (280)

第 1 章 矢量分析与场论

也许你会发现，在这门课程中，我们几乎总是在和“场”打交道。实际上，我们周围的物理世界中的确存在着各种各样的场。例如，自由落体现象说明存在着重力场，指南针的偏转现象说明存在着磁场，人们对冷暖的感觉说明空间分布着温度场，等等。从数学的观点出发，一个场中的每一点所具有的物理特性，都可以用一个或几个确定的物理量来描述。然而，当这些描述场点特性的物理量不仅与大小有关，还与方向有关时，通常需要使用矢量来表示它们。

矢量在空间的分布构成了所谓的矢量场，分析矢量场在空间的分布和变化情况时，会涉及矢量的分析方法和场论的概念，为了后面各章学习的需要，有必要首先了解矢量代数及场论的相关知识。

1.1 矢量的表示和运算

1.1.1 矢量与标量

只有大小而不包含方向的物理量称为**标量**，如温度、电位、能量、长度、时间等都是标量。由标量所描述的场称为**标量场**。

既有大小又包含方向的物理量称为**矢量**，也称为向量，如力、速度、加速度、电场强度、磁场强度、电流密度等都是矢量。由矢量所描述的场称为**矢量场**。

根据我国有关符号使用标准，使用黑斜体字母来表示矢量，如 \mathbf{A} 。矢量 \mathbf{A} 的大小称为矢量的模，表示为 $|\mathbf{A}|$ 或 A ，矢量的方向可用单位矢量表示，如 \mathbf{e}_a 。单位矢量是指长度(模)为 1 个单位的矢量，所以可用它表示方向。在几何描述上，如图 1.1 所示的矢量 \mathbf{A} ，线段长度代表它的大小(模)，线段的方向表示它的方向。

图 1.1 所示的矢量 \mathbf{A} 在一维笛卡儿坐标系(又称为直角坐标系)中表示为

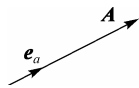


图 1.1 矢量的表示

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}_a \quad (1.1)$$

式中， A 称为矢量 \mathbf{A} 的模； \mathbf{e}_a 描述了矢量 \mathbf{A} 的方向。

在二维笛卡儿坐标系中，矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y \quad (1.2)$$

式中，矢量 \mathbf{A} 的模为 $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ，而 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_y 则分别为 x 轴和 y 轴方向上的单位矢量，矢量 \mathbf{A} 的方向是由 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_y 来描述的。式(1.2)中的 A_x 和 A_y 分别为 \mathbf{A} 在笛卡儿坐标系中的 x 轴分量和 y 轴分量，也可以说是 \mathbf{A} 的两个分量函数。

在三维笛卡儿坐标系中，矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z \quad (1.3)$$

式中, 矢量 \mathbf{A} 的模为 $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$, 而 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z 则分别为笛卡儿坐标系 x 、 y 和 z 轴三个方向上的单位矢量, \mathbf{A} 的方向是由 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z 来描述的。式(1.3)中的 A_x 、 A_y 和 A_z 分别为 \mathbf{A} 在笛卡儿坐标系中的 x 轴分量、 y 轴分量和 z 轴分量, 也可以说是 \mathbf{A} 的三个分量函数。

1.1.2 矢量的代数运算

1. 矢量的加法和减法

矢量加法是矢量之和, 两个矢量之和服从平行四边形规则, 如图1.2(a)所示。从代数运算的角度来看, 两个矢量相加等于两矢量的对应坐标分量之和, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) + (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= (A_x + B_x) \mathbf{e}_x + (A_y + B_y) \mathbf{e}_y + (A_z + B_z) \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (1.4)$$

矢量相加满足交换律与结合律, 即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交换律})$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{结合律})$$

矢量减法可以看成是矢量加法的特例, 如

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

如图1.2(b)所示。通常将 $-\mathbf{B}$ 称为矢量 \mathbf{B} 的逆矢量, 它的大小与 \mathbf{B} 的大小相等, 但方向相反。从代数运算的角度来看, 两矢量相减等于两矢量的对应坐标分量之差, 即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \mathbf{e}_x + (A_y - B_y) \mathbf{e}_y + (A_z - B_z) \mathbf{e}_z$$

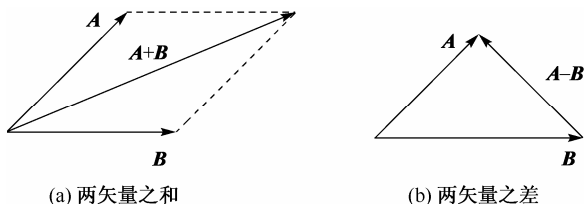


图 1.2 两矢量之和与差

2. 标量与矢量相乘

标量 η 乘以矢量 \mathbf{A} , 其积仍为矢量, 并满足以下关系:

$$\eta \mathbf{A} = \eta A_x \mathbf{e}_x + \eta A_y \mathbf{e}_y + \eta A_z \mathbf{e}_z \quad (1.5)$$

$$\eta \mathbf{A} = \begin{cases} |\eta \mathbf{A}| \mathbf{e}_a & \eta \geq 0 \\ |\eta \mathbf{A}| (-\mathbf{e}_a) & \eta < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

式(1.6)中, $\mathbf{A} = A \mathbf{e}_a$ 。

3. 矢量的标积与矢积

两矢量相乘, 其积有两种情况: 一种积为标量, 称为**标积**; 另一种积仍为矢量, 称为**矢积**。

两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标积记为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 标积通常也称为点乘。两矢量的标积等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦, 也等于两矢量的对应笛卡儿坐标分量积之和, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.7)$$

式中, θ 为矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 的夹角。由式(1.7)可知, 两矢量进行标积后的结果变成了无方向性的标量。

如果作用在某一物体上的力为 \mathbf{A} , 当 \mathbf{A} 使该物体发生了位移且位移矢量为 \mathbf{B} 时, 则 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示力 \mathbf{A} 使物体位移所做的功。由式(1.7)可以看出, 两矢量的标积满足交换律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

显而易见, 标积不但与两矢量的大小有关, 还与其之间的夹角有关。当两矢量相互垂直, 即 $\theta = 90^\circ$ 时, 其标积为零; 当两矢量平行, 即 $\theta = 0^\circ$ 时, 其标积的绝对值最大, 等于两矢量的模之积, 即

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_{\theta=0^\circ} = AB \cos 0^\circ = AB$$

两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的矢积记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 矢积通常也称为叉乘。两矢量进行矢积后的结果仍是一个矢量, 其大小等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的正弦, 其方向为两矢量所构成的面的法线方向, 这个方向通常用 \mathbf{e}_n 表示或用 \mathbf{n} 表示, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1.8)$$

矢积的方向 \mathbf{e}_n 符合右手定则, 即右手四指从 \mathbf{A} 旋转到 \mathbf{B} , 拇指的方向即为 \mathbf{e}_n 的方向, 如图1.3所示。

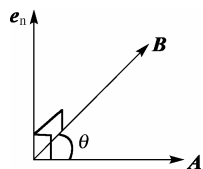


图 1.3 矢积的方向

矢积与两矢量的笛卡儿坐标分量的关系为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (1.9)$$

通常, 式(1.9)可写成行列式的形式来进行记忆, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

矢积的几何意义是: 以两矢量为邻边所围成的平行四边形的面积为矢积的大小, 以该平行四边形的法向为矢积的方向。当 \mathbf{B} 表示作用在某一物体上的力, 而 \mathbf{A} 表示力臂矢量时, 则矢积表示作用于该物体的力矩。

由式(1.9)可以看出

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

这说明矢积不满足交换律。

矢积不但与两矢量的大小有关, 而且与两矢量之间的夹角有关。两矢量平行, 即 $\theta = 0^\circ$ 时, 矢积为零; 两矢量垂直, 即 $\theta = 90^\circ$ 时, 矢积的模最大。

4. 矢量的混合运算

常用的矢量混合运算恒等式如下:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1.11)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (1.14)$$

1.1.3 标量场与矢量场

在火炉、暖气片等热源周围空间的每一点上,都存在着温度的某种分布,于是我们就说空间存在温度场;在江河中,各处水域存在着水流速的某种分布,我们就说那里存在流速场;在地球周围各点,存在着对各种物体的引力,我们说地球周围存在引力场,或者说地面上有重力场;在电荷周围各点,存在着对电荷的作用力,我们就说电荷周围有电场,等等。显然,“场”是指某种物理量在空间的分布。

物理量在空间的分布构成了场,但除了空间分布之外,物理量还可能随时间发生变化。因此在数学上,场是由空间特征物理量和时间坐标变量的多元函数来描述的,即标量场用空间和时间变量的标量函数表示,而矢量场则用空间和时间变量的矢量函数表示。例如,作为标量场的温度场可表示为 $T(x, y, z, t)$, 电位场可表示为 $\phi(x, y, z, t)$; 作为矢量场的流速场可表示为 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, 电场可表示为 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, 磁场可表示为 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 。在电磁场中,若描述场的物理量随时间变化,则称其为时变电磁场。而当描述场的物理量与时间无关时,就将其称为静态电磁场,也就是说,静态场只是空间坐标的函数。例如,静电场可表示为 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。

为了形象和直观地描述标量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化情况,常借助于画出其一系列等值间隔的等值面方法,不同等值面的形状及其间隔能较直观地表现标量场的空间分布情况。而为了形象和直观地描述矢量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化情况,则常借助于画出其场线(力线)的方法。场线是一簇空间有向曲线,矢量场较强处场线稠密,矢量场较弱处场线稀疏,场线上某处的切线方向代表该处矢量场的方向。

场既然是某种物理量的空间分布,就应服从因果律。其因,称之为场源,场都是由场源产生的。其果,就是空间某种分布形式的场。例如,温度场由热源产生,静电场由电荷产生。但值得注意的是,场的分布不但取决于产生它的场源,而且还与周围物质环境密切相关。例如,炉膛中的温度分布不仅取决于火力大小及分布,还与炉膛的结构、材料特性及周围环境有关;带电体周围的电场分布不仅与带电体的电荷分布和电量有关,也与周围的物质特性有关。所以,分析讨论一个场的时候,要注意场、场源和场的环境这三者之间的关联性。如果能用一个数学关系来描述电磁场,那么这样的数学关系中一定包含了体现场、场源和场的环境相关的因素。

1.2 正交坐标系

当物理量是空间位置的函数,或者说场与空间分布有关时,为了描述某一场量在空间的分布和变化规律,必须引入坐标系,以表示物理量的空间位置或方向。笛卡儿坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是最常用的三种正交坐标系。

1.2.1 正交坐标系的概念

在广义正交坐标系中,坐标变量用 u_1 、 u_2 和 u_3 表示,若空间一点 P 是 $u_1 = C_1$ (常数)、 $u_2 = C_2$ (常数) 和 $u_3 = C_3$ (常数) 三个曲面的交点,则它的坐标为 $P(u_1, u_2, u_3)$, 这三个曲面称为坐标面。广义正交坐标系中,三个坐标面相互正交,简称正交坐标系。正交坐标系具有以下几个概念。

1. 正交坐标系的三组坐标面在空间每一点都相互正交, 即为相互垂直的坐标面

三维空间中的任一点 P 可用三个独立变量 u_1 、 u_2 和 u_3 来确定, 即 P 点的空间坐标为 $P(u_1, u_2, u_3)$ 。在笛卡儿坐标系、圆柱坐标系或球坐标系中, 可将 P 点分别表示为 $P(x, y, z)$ 、 $P(r, \varphi, z)$ 或 $P(R, \theta, \varphi)$, 每一种表示中的三个独立变量所构成的坐标面都相互垂直。

2. 单位矢量两两正交, 相互垂直, 且满足右手螺旋法则

在正交坐标系中, 设与三个坐标面对应的单位矢量分别为 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 。这三个单位矢量互相正交, 满足右手螺旋法则, 三者的方向分别以其变量增大的方向为正方向。

3. 正交坐标系中单位矢量的特性

正交坐标系中的三个单位矢量 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 具有如下特性:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (1.15)$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (1.16)$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \quad (1.17)$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \quad (1.18)$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (1.19)$$

在笛卡儿坐标系中, 三个单位矢量是常量, 而在其他坐标系中, 三个单位矢量却不一定是常量。

4. 矢量微分元

在电磁场中, 经常要进行线积分、面积分和体积分的计算, 于是就需要表达出与长度、面积和体积对应的微分线元、微分面积元(简称微分面元)和微分体积元(简称微分体元)。在矢量微积分运算中, 特别是在电磁场的微积分运算中, 线元和面元是矢量, 是有方向的。因此, 单位矢量有可能是变量, 即单位矢量也存在微分元问题。下面分别就三种最常见的正交坐标系进行相关讨论。

1.2.2 笛卡儿坐标系

在笛卡儿坐标系中, 空间任意一点 M 的位置可以用三个相互独立的变量 x 、 y 、 z 表示, 记为 $M(x, y, z)$, 它们的变化范围分别是: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$ 。如图1.4所示, 因为任意一点 M 的单位矢量处于正交坐标系的三个坐标轴上, 因此, 它们相互垂直并遵循右手螺旋法则, 即

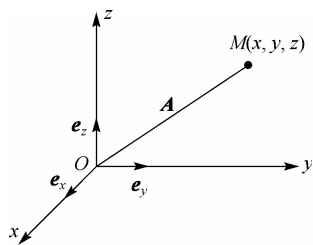


图 1.4 笛卡儿坐标系

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (1.20)$$

三个单位矢量的方向不随 M 点的位置变化而变化, 这是笛卡儿坐标系的一个重要特性。在笛卡儿坐标系中, 空间任一点 M 的位置可用向量表示为 \mathbf{OM} , 也可用一个矢量 \mathbf{A} 来表示, 即

$$\mathbf{OM} = \mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z \quad (1.21)$$

式中, x 、 y 、 z 分别表示 \mathbf{A} 在三个单位矢量方向 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 上的投影; A_x 、 A_y 、 A_z 分别表示矢量 \mathbf{A} 在三个方向的分量。当 $M(x, y, z)$ 点在空间作一微小移动后到达 M' 点时, 则 M' 的位置可表示为 $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, 其中 dx 、 dy 、 dz 分别是变量 x 、 y 、 z 在 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 方向上的微小增量, \mathbf{MM}' 就是矢量 \mathbf{A} 沿该方向的微分元, 可表示为

$$\mathbf{MM}' = d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$$

矢量 \mathbf{A} 的微分元仍是一个矢量, 其方向由 M 指向 M' 。如图 1.5 所示, 由 x 、 $x+dx$ 、 y 、 $y+dy$ 、 z 、 $z+dz$ 这六个点组成一个直角六面体, 其各个面的面积即为面元, 可表示为

$$\begin{cases} dS_x = dydz\mathbf{e}_x \\ dS_y = dx dz\mathbf{e}_y \\ dS_z = dx dy\mathbf{e}_z \end{cases}$$

注意: 对于闭合曲面, 面元的方向为曲面上该点的外法线方向; 对于非闭合曲面, 面元的方向要在曲面边界的环绕方向选定后, 根据右手螺旋法则来确定。对于图 1.5 所示的六面体, 各边都由面元组成, 它们所组成的体积为体元, 可表示为

$$dV = dx dy dz$$

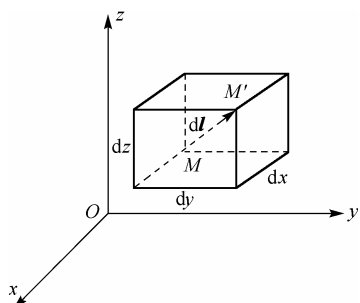


图 1.5 笛卡儿坐标系中的微分元

1.2.3 圆柱坐标系

空间任一点 M 也可用三个相互独立的变量 r 、 φ 、 z 来表示, r 、 φ 、 z 是圆柱坐标系的三个坐标变量。 M 点的位置在圆柱坐标系下可写为 $M(r, \varphi, z)$ 。

现在来看看圆柱坐标系中三个坐标变量的物理意义。如图 1.6 所示, 设 r 为 M 点到 z 轴的垂直距离, 也就是圆柱底面的半径; φ 为 xOz 平面与通过 M 点的半平面的夹角; z 为 M 到 xOy 平面的垂直距离(与笛卡儿坐标系相同)。用这样定义的这三个变量便可确定空间任一点 M 的位置, 三个变量的变化范围分别是: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ 。当 r 不变而 φ 、 z 变化时, 就是一个圆柱面(即为 r 的坐标面), 所以称之为圆柱坐标系。

圆柱坐标系的三个变量的单位矢量分别是 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z , 它们分别指向 r 、 φ 、 z 增加的方向。其中, 当 φ 为变量时, \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_φ 是变量, 不是常量, 因为 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_φ 的方向随 M 点的不同会发生变化。但不管怎样, 它们始终保持相互正交, 且符合右手螺旋法则, 即

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (1.22)$$

空间任一点 M 的位置可用单位矢量表示为

$$\mathbf{OM} = \mathbf{A} = r\mathbf{e}_r + \varphi\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z \quad (1.23)$$

r 、 φ 、 z 分别是矢量 \mathbf{OM} 或 \mathbf{A} 在 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 方向上的投影。

圆柱坐标系的变量与笛卡儿坐标系的关系是

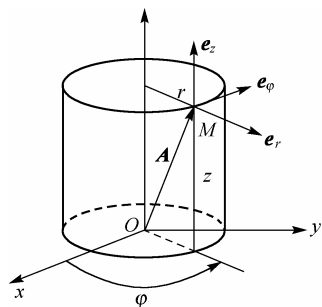


图 1.6 圆柱坐标系

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r \sin \varphi, & \varphi = \arctan(y/x) \\ z = z, & z = z \end{cases} \quad (1.24)$$

如图1.7所示,三个坐标变量的增量微元表示为 dr 、 $d\varphi$ 、 dz , 在 $M(r, \varphi, z)$ 点处沿 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 方向的长度元即变量的线元分别用 dl_r 、 dl_φ 、 dl_z 表示, 于是有 $dl_r = dr$ 、 $dl_\varphi = r d\varphi$ 、 $dl_z = dz$ 。所以, M 点矢量的线元可表示为

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{e}_r + r d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z \quad (1.25)$$

由此看来,矢量的线元仍是一个矢量。

由 r 、 $r+dr$ 、 φ 、 $\varphi+d\varphi$ 、 z 、 $z+dz$ 这六个坐标点所决定的六面体的面元分别为

$$\begin{cases} dS_r = dl_\varphi dl_z \mathbf{e}_r = r d\varphi dz \mathbf{e}_r \\ dS_\varphi = dl_r dl_z \mathbf{e}_\varphi = dr dz \mathbf{e}_\varphi \\ dS_z = dl_r dl_\varphi \mathbf{e}_z = r dr d\varphi \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (1.26)$$

所以面元也是矢量。

在圆柱坐标系下,任意曲面上的面元可表示为

$$d\mathbf{S} = dS_r + dS_\varphi + dS_z \quad (1.27)$$

任意体元可表示为

$$dV = dl_r dl_\varphi dl_z = r dr d\varphi dz \quad (1.28)$$

1.2.4 球坐标系

如图1.8所示,在球坐标系中三个坐标变量分别为 R 、 θ 、 φ , 空间任一点 M 可表示为 $M(R, \theta, \varphi)$, 其几何意义是: R 为坐标原点 O 到 M 点的距离, 即球的半径; θ 为 z 轴与 OM 之间的夹角, 即 R 与正 z 轴的夹角, φ 为 OM 在 xOy 平面上的投影与正 x 轴的夹角。因此,这三个变量的变化范围是: $0 \leq R < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。

球坐标系变量与笛卡尔坐标系变量的关系为

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, & R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, & \tan \theta = \sqrt{x^2 + y^2} / z \\ z = R \cos \theta, & \tan \varphi = y/x \end{cases} \quad (1.29)$$

球坐标系变量与圆柱坐标系变量的关系为

$$\begin{cases} r = R \sin \theta, & R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \varphi = \varphi, & \tan \theta = r/z \\ z = R \cos \theta, & \varphi = \varphi \end{cases} \quad (1.30)$$

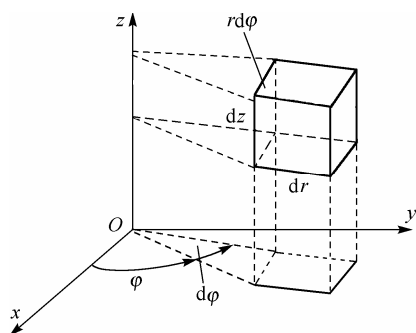


图 1.7 圆柱坐标系的微分元

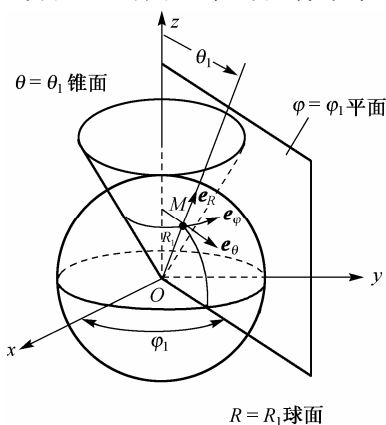


图 1.8 球坐标系

球坐标系的单位矢量为 \mathbf{e}_R 、 \mathbf{e}_θ 、 \mathbf{e}_φ ，它们两两正交，其方向分别是沿 R 、 θ 、 φ 增加的方向，且满足

$$\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\theta$$

在球坐标系中， \mathbf{e}_R 、 \mathbf{e}_θ 、 \mathbf{e}_φ 的方向因 M 点位置的变化而改变，所以单位矢量有可能是变量，但三者将始终保持正交关系。在球坐标系中， M 点的位置用单位矢量可表示为

$$\mathbf{OM} = \mathbf{A} = R\mathbf{e}_R + \theta\mathbf{e}_\theta + \varphi\mathbf{e}_\varphi \quad (1.31)$$

式中， R 、 θ 、 φ 分别是矢量 \mathbf{A} 在 \mathbf{e}_R 、 \mathbf{e}_θ 、 \mathbf{e}_φ 方向上的投影。

如图1.9所示，球坐标系中三个坐标变量的微元分别为 dR 、 $d\theta$ 、 $d\varphi$ ，这三个变量所对应的线元可分别表示为

$$dl_R = dR, \quad dl_\theta = R d\theta, \quad dl_\varphi = R \sin\theta d\varphi \quad (1.32)$$

于是，矢量 \mathbf{A} 的线元为

$$d\mathbf{l} = dR\mathbf{e}_R + R d\theta\mathbf{e}_\theta + R \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi \quad (1.33)$$

由 R 、 $R+dR$ 、 θ 、 $\theta+d\theta$ 、 φ 、 $\varphi+d\varphi$ 这六个坐标点组成的六面体的面元分别是

$$\begin{cases} dS_R = dl_\theta dl_\varphi \mathbf{e}_R = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_R \\ dS_\theta = dl_R dl_\varphi \mathbf{e}_\theta = R \sin\theta dR d\varphi \mathbf{e}_\theta \\ dS_\varphi = dl_R dl_\theta \mathbf{e}_\varphi = R dR d\theta \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (1.34)$$

体元为

$$dV = dl_R dl_\theta dl_\varphi = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi \quad (1.35)$$

1.2.5 三种坐标系中单位矢量之间的关系

在进行坐标变换时，矢量之间的关系主要反映在不同坐标系之间的单位矢量相互换算的关系上。

1. 圆柱坐标系与笛卡儿坐标系之间单位矢量的关系

如图1.10所示，圆柱坐标系与笛卡儿坐标系之间的关系主要表现为单位矢量 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 与 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 之间的关系。因为二者的 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$ ，所以，其关系就简化为 xOy 平面上的二维关系。又因为单位矢量的模的大小为1，即在 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 的投影为1，所以

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi \\ \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi \\ \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi \end{cases} \quad (1.37)$$

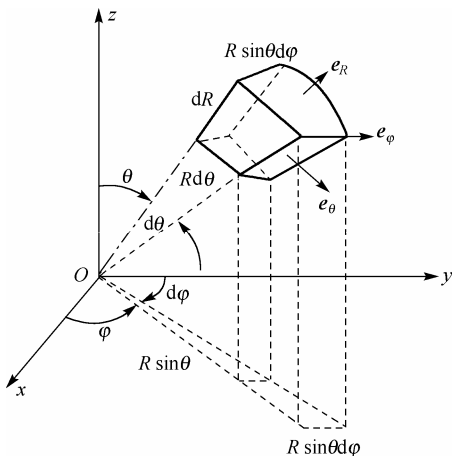


图1.9 球坐标系中的微分元

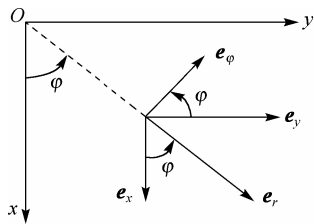


图1.10 圆柱坐标系与笛卡儿坐标系之间的变换关系

因为 \mathbf{e}_r 和 \mathbf{e}_φ 是随 φ 变化的, 所以对式 (1.36) 微分, 可以得到

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_r/d\varphi = \mathbf{e}_\varphi \\ d\mathbf{e}_\varphi/d\varphi = -\mathbf{e}_r \end{cases} \quad (1.38)$$

这说明, 当 φ 变化时, 单位矢量 \mathbf{e}_r 和 \mathbf{e}_φ 是变量, 这是一个重要的结论。

2. 圆柱坐标系与球坐标系之间单位矢量的关系

因为圆柱坐标系和球坐标系都有相同的 φ 变量, 即二者的 $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi$, 因此同样可简化为 rOz 平面上的二维关系, 如图 1.11 所示。

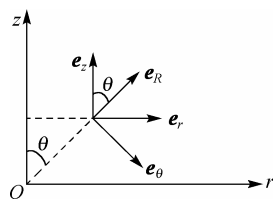


图 1.11 圆柱坐标系与球坐标系之间的变换关系

$$\begin{cases} \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta \\ \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_z \sin \theta \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_R \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_R \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (1.40)$$

3. 球坐标系与笛卡儿坐标系之间单位矢量的关系

类似地, 从图 1.8 及球坐标系的坐标变量与笛卡儿坐标系的变量关系式 (1.29), 可得出两坐标系中单位矢量之间有如下关系:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta \\ \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \theta \\ \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_R \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi \\ \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_R \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_R \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (1.42)$$

从式 (1.41) 和式 (1.42) 可看出, 在球坐标系中, 单位矢量均不是常量, 它们都是随某个量而变化的, 即有

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_R/d\theta = \mathbf{e}_\theta \\ d\mathbf{e}_\theta/d\theta = -\mathbf{e}_R \\ d\mathbf{e}_\varphi/d\theta = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_R/d\varphi = \mathbf{e}_\varphi \sin \theta \\ d\mathbf{e}_\theta/d\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cos \theta \\ d\mathbf{e}_\varphi/d\varphi = -\mathbf{e}_R \sin \theta - \mathbf{e}_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (1.44)$$

例 1.1 试将圆柱坐标系中的矢量 $\mathbf{A} = -r\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$ 变换为笛卡儿坐标系中的表达式。

解法 1: 按题意有 $A_r = 0$ 、 $A_\varphi = -r$ 、 $A_z = z$, 设矢量在笛卡儿坐标系中表示为 $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$, 由图 1.10 可知

$$\begin{cases} A_x = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_x = r \sin \varphi \\ A_y = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_y = -r \cos \varphi \\ A_z = A_z = z \end{cases}$$

根据坐标变换关系, 由

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} A_x = y \\ A_y = -x \\ A_z = z \end{cases}$$

所以

$$\mathbf{A} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

解法 2: 直接利用矩阵公式
$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ z \end{bmatrix}$$

同样可得

$$\mathbf{A} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

1.3 矢量函数的通量与散度

为了研究矢量场的空间变化情况, 我们需要引入矢量场的**散度**的概念。矢量函数的散度是一个标量函数, 它表示矢量场中任意一点处通量对体积的变化率, 即描述了通量源的强度。因此, 在具体讨论散度之前必须先从通量的概念入手。

1.3.1 矢量的通量

正如 1.1 节中所描述的那样, 在研究电场、磁场时, 可借助一组场线(矢量线)来形象地表示矢量场的空间分布, 如描述电场的电力线、描述磁场的磁力线等。矢量场中每一点都有唯一的一条矢量线通过, 线的疏密表示该点处矢量场的强弱。下面以电力线为例进行分析。

如图 1.12 所示, 设空间一点 M 处的场强函数为 \mathbf{E} , 在笛卡儿坐标系中, 有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$$

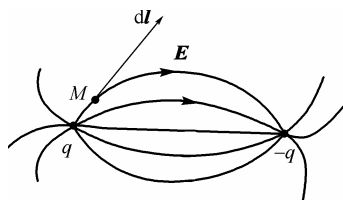


图 1.12 矢量线

在电力线上取一线元 $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$, 其方向为沿矢量线切线的方向。由于矢量线上任一点的切线方向即 $d\mathbf{l}$ 的方向与该点矢量场 \mathbf{E} 的方向平行, 从矢量叉乘的几何意义可知

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$$

展开表示为

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

可得

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1.45)$$

式(1.45)即为电力线的微分方程, 求出其通解, 就可得出矢量线的表达式。

在矢量场中, 经常会遇到要对曲面求积分, 这时在曲面 S 上, 可取一个面元 $d\mathbf{S}$ 。由于面元除了大小之外, 在空间也有一定的取向, 因此要用一个矢量来表示面元。如图1.13所示, 取一个与面元相垂直的单位矢量 \mathbf{e}_n , 称为面元的法向矢量, 并用它来表示面元 $d\mathbf{S}$ 的取向, 则面元矢量可表示为

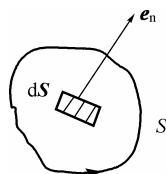


图 1.13 面元

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_n$$

确定 \mathbf{e}_n 的取向要分两种情况考虑: ①当 $d\mathbf{S}$ 是一个闭合面 S 上的一个面元时, \mathbf{e}_n 的方向为闭合面在 $d\mathbf{S}$ 这一点上的外法线方向; ②当 $d\mathbf{S}$ 是由一个闭合曲线 C 为边界所组成的开表面的一个面元时, 要确定面元 $d\mathbf{S}$ 的方向, 首先必须选定曲线 C 的绕行方向, 然后沿绕行方向卷曲右手指头, 则大拇指的方向即为 \mathbf{e}_n 的方向, 二者满足右手螺旋关系。

在笛卡儿坐标系中, $d\mathbf{S}$ 可以写成

$$d\mathbf{S} = dS_x \mathbf{e}_x + dS_y \mathbf{e}_y + dS_z \mathbf{e}_z = dydz \mathbf{e}_x + dx dz \mathbf{e}_y + dx dy \mathbf{e}_z \quad (1.46)$$

式中, dS_x 是面元在 yOz 平面上的投影; dS_y 是面元在 xOz 平面上的投影; dS_z 是面元在 xOy 平面上的投影。

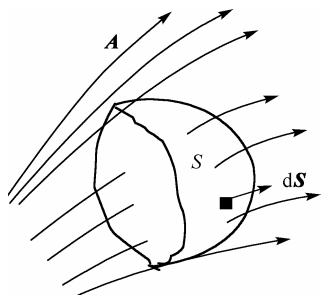


图 1.14 矢量的通量

如图1.14所示, 在矢量场 \mathbf{A} 中, 曲面 S 上取的面元 $d\mathbf{S}$ 很小, 在面元 $d\mathbf{S}$ 上的矢量 \mathbf{A} 可认为相等, 方向也可认为相同。

于是将 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos \theta dS$ 称为矢量 \mathbf{A} 穿过 $d\mathbf{S}$ 的通量, 记为

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos \theta dS \quad (1.47)$$

式中, θ 为矢量 \mathbf{A} 与面元 $d\mathbf{S}$ 的夹角。

通量是一个标量, 它的正、负与面元法线矢量的选取有关。将曲面 S 的各个面元上的 $d\Phi$ 相加, 即可得到穿过曲面 S 的通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_S A \cos \theta dS \quad (1.48)$$

通量的物理意义是: 借用矢量线的概念, 通量可以认为是矢量 \mathbf{A} 穿过曲面 S 的矢量线总数。矢量线也称为通量线, 穿出的为正, 穿入的为负。矢量场 \mathbf{A} 也可称为通量面密度矢量。

如果 S 面是一个闭合曲面, 则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n dS$$

式中, \mathbf{A} 是闭合面上的矢量函数。当 $\Phi > 0$ 时, 表明穿出闭合面 S 的通量线数多于穿入 S 面

的通量线数, 这时 S 面内一定有发出通量线的源, 是正源; 当 $\Phi < 0$ 时, 表明穿入 S 面的通量线数多于穿出 S 面的磁通线数, S 面内必有吸收通量线的阱, 称为负源; 当 $\Phi = 0$ 时, 表明穿出 S 面的通量线数等于穿入 S 面的磁通线数, 这时 S 面内的正源与负源的代数和为零, 或者说, S 面内没有源。源和阱或正源与负源统称为通量源。

1.3.2 散度

矢量场中, 矢量通过闭合面 S 的通量是由 S 面内的通量源决定的。从式(1.48)可看出, 通量是一个积分量, 它描述的是闭合面内是否存在通量源, 但它却不能说明场在闭合面内每一点处的分布情况。对于一个场的分析来说, 知道场中每一点的场源分布规律是必要的。

如图1.15所示, 设有一矢量场 \mathbf{A} , 在场中任一点 M 处, 作一个包含 M 点在内的任一闭合曲面 S , S 面所包围的体积为 ΔV 。体积 ΔV 以任意方式缩向 M 点时, 即 $\Delta V \rightarrow 0$ 时的通量为

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

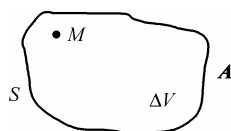


图 1.15 闭合曲面

如果此极限存在, 则称此极限为矢量场 \mathbf{A} 在 M 点处的散度, 记为 $\text{div } \mathbf{A}$, 即

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V} \quad (1.49)$$

式中, \mathbf{n} 为单位法向矢量。由式(1.49)可看出, $\text{div } \mathbf{A}$ 表示在场中任意一点处通量对体积的变化率, 也可看成是在该点处一个单位体积通过的通量, 它表示了场中各点的场与通量源的关系。

从散度的定义可知, 在 M 点处, 当 $\text{div } \mathbf{A} > 0$ 时, 表明该点存在正源, 发出通量线; 当 $\text{div } \mathbf{A} < 0$ 时, 表明该点存在负源, 吸收通量线; 当 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ 时, 表明该点无源。另外, $\text{div } \mathbf{A}$ 与所取的体积形状无关。因为当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, 整个体积趋于 0。

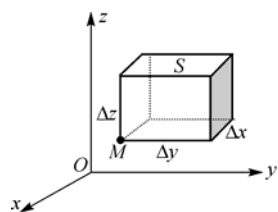


图 1.16 体元

如图1.16所示, 在笛卡儿坐标系中, 取一点 $M(x, y, z)$, 以 M 为顶点作一平行六面体, 其表面为闭合面 S , 其三个边分别为 Δx 、 Δy 、 Δz , 则正六面体的体积为

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

设在点 $M(x, y, z)$ 的矢量函数为 \mathbf{A} , 并且

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (1.50)$$

则从前后两个表面穿出的净通量为

$$\Delta \Phi_{\text{前后}} = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - A_x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

其中 $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ 为矢量 \mathbf{A} 沿 x 的变化率, 于是沿 x 方向的变化量为 $\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$, 因此加上 \mathbf{A} 的分量, 则

可表示为 $A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$ 。

同理, 从左右两个面和上下两个面穿出的净通量分别为

$$\Delta\Phi_{\text{左右}} = \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - A_y \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\Phi_{\text{上下}} = \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - A_z \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

所以, 从平行六面体闭合面 S 穿出的矢量 \mathbf{A} 的总净通量为

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \Delta\Phi_{\text{前后}} + \Delta\Phi_{\text{左右}} + \Delta\Phi_{\text{上下}} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

则

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.51)$$

由此可知, 一个矢量函数的散度为一个标量函数, 在场中任一点, 矢量场 \mathbf{A} 的散度等于 \mathbf{A} 的各个坐标轴上的分量对各自变量的偏导数之和。将式(1.51)用矢量关系描述可得到

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \end{aligned}$$

引入一个矢性微分算子 ∇ , 这个算子称为**哈密顿算子**, 即

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.52)$$

于是, 散度在笛卡儿坐标系下的表达式可以写成

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.53)$$

注意: ∇ 是一个很重要的微分算子, 它有两重意义。首先它是矢性的, 而不是一个具体的矢量; 其次它是微分算符, 它对跟随其后的函数进行微分, 而不管跟随其后的函数是矢量函数还是标量函数。式(1.53)就是用哈密顿算子表示的散度表达式, 由此式可看出, 它与所取的坐标系无关, 但在具体计算时, 可选择不同坐标系。

可以推得, 在圆柱坐标系下, 有

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.54)$$

在球坐标系下, 有

$$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.55)$$

于是, 在圆柱坐标系中, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi + \mathbf{e}_z A_z) + \\ &\quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi + \mathbf{e}_z A_z) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi + \mathbf{e}_z A_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} A_r + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} A_\varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.56)$$

在球坐标系中, 有

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.57)$$

利用哈密顿算子的性质可以证明, 散度运算符合下列规则:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

式中, ϕ 为标量函数。

1.3.3 高斯散度定理

散度定理是德国数学家高斯从纯数学观点导出的有关源发散的一个基本定理, 又称为高斯通量定理。在矢量分析中, 它是一个重要定理。该定理用数学表达式可描述为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.58)$$

其意义是: 任意矢量函数 \mathbf{A} 的散度在场中任意一个体积内的体积分, 等于该矢量函数 \mathbf{A} 在限定该体积的闭合面的法线分量沿闭合面的面积分。也即, 一个矢量通过一闭合面的通量等于该矢量的散度对该闭合面所包围的体积的体积分。我们可以利用散度定理将曲面积分转换成体积分, 或将体积分转换成曲面积分。

证明: 如图1.17所示, 在矢量场 \mathbf{A} 中, 取任一闭合曲面 S , 其所包围的体积为 V , 将体积分成无穷多个体元, 它们分别是 ΔV_1 、 ΔV_2 、 \cdots 、 ΔV_k 、 \cdots , 对其中任意一个小体元 ΔV_i , 由散度定义可知

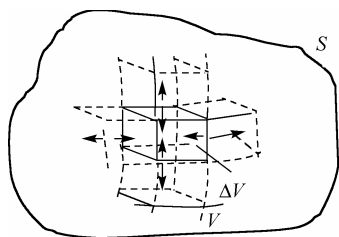


图 1.17 体积 V 的分割

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V_i} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\text{其通量为} \quad \Delta \Phi_i = \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i$$

同理, 相邻的体元 ΔV_j 也有

$$\Delta \Phi_j = \oint_{\Delta S_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_j$$

由 ΔV_i 和 ΔV_j 组成的体积中穿出的通量为

$$\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i + \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_j = \iint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Delta S_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Delta S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

因为相邻体元有一个公共表面, 这个公共表面上的通量对这两个体元来说恰是等值异号的, 求和时正好互相抵消。因此, 上式右边的积分值等于由 ΔV_i 和 ΔV_j 组成的体积的外表面上的通量。

依此类推, 当体积 V 由 N 个体元组成时, 通过闭合面 S 上的通量应为

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \iint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 由体积分的定义, 上式左边的总和可以表示为一个体积分, 所以有

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

证毕。

例 1.2 长方体区域由 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $y=0$ 、 $y=2$ 及 $z=0$ 和 $z=3$ 六个面组成, 设其内矢量场 $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{e}_x + x^2\mathbf{e}_y$, 试验证散度定理的有效性。

解: 由题意知 \mathbf{D} 为二维矢量, 且和表面 $z=0$ 及 $z=3$ 平行, 因此只需要计算其余表面的通量。

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dydz\mathbf{e}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dydz\mathbf{e}_x) + \\ &\quad \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx dz\mathbf{e}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx dz\mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

由于 $(D_x)_{x=0} = 0$ 、 $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$ 及 $(D_x)_{x=1} = 2y$, 代入上式, 等号右边第一个积分式为零, 第三个和第四个积分式相互抵消, 结果为

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz = \int_0^3 4 dz = 12$$

又因为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2) = 2y$$

于是体积分

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz = \int_0^3 4 dz = 12$$

曲面积分和体积分结果一致, 说明散度定理有效。

1.4 矢量函数的环量与旋度

通量和散度针对的是具有通量源的矢量场, 我们用它们来描述场中的通量源与场点的关系。而能够产生矢量场的源除了通量源外, 还有一类源, 称为旋涡源。例如, 对于磁场 \mathbf{B} , 在任意曲面内都有 $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 看起来磁场 \mathbf{B} 似乎是无源的, 但该场又的确存在。事实上, 它只是说明没有通量源, 这时的场其实就是由旋涡源产生的。要讨论旋涡源所形成的场, 需要引入矢量场的旋度。而要讨论矢量函数的旋度, 必须先引入环量的概念。

1.4.1 矢量的环量

如图1.18所示,在矢量场中取任意一个闭合路径 l ,则矢量函数 \mathbf{A} 沿闭合路径 l 的线积分

$$C = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.59)$$

称为矢量 \mathbf{A} 沿闭合曲线 l 的环量。其中 \mathbf{A} 是闭合路径上任一点的场矢量, $d\mathbf{l}$ 是闭合路径上的线元矢量,即路径上的切向长度矢量。

因此

$$C = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l A \cos \theta dl \quad (1.60)$$

式中, θ 为 \mathbf{A} 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角。

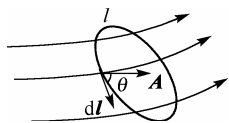


图 1.18 矢量的环量

由式(1.60)可以看出,环量是一个标量,其大小和正负与矢量场 \mathbf{A} 的分布有关,而且与所取积分环绕方向有关。式(1.60)纯属一种数学定义,其物理意义随矢量函数所代表的场而定。例如,当 \mathbf{A} 为电场强度时,其环量将是围绕闭合路径的电动势;在重力场中,环量是重力所做的功。当 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 时, \mathbf{A} 代表的场即由旋涡源所

产生,这时闭合环路包围有旋涡源。环量描述了旋涡源与场的关系,若任意回路内 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$,即矢量函数沿任何闭合路径上的环量等于零,这时场中不可能有旋涡源,这种场称为无旋场或保守场。如静电场、重力场就是保守场。当 \mathbf{A} 为稳恒电流形成的磁感应强度 \mathbf{B} 时,即 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$,这就是安培环路定律。

环量只能描述闭合路径内是否存在旋涡源,而不能描述场中某一点的具体点的性质和分布规律,若要进一步地描述这些规律,就需要引入旋度。

1.4.2 矢量场的旋度

在矢量场 \mathbf{A} 中,为了研究场中某点 M 的性质,取包含 M 点的一个面元 ΔS ,其周界为 C ,选定 C 的绕行方向,由右手螺旋法则确定面元的法线矢量 \mathbf{e}_n 的方向。如图1.19所示,沿着包围这个面元的闭合路径取 \mathbf{A} 的线积分,保持 \mathbf{e}_n 的方向不变,而使曲面面元 ΔS 以任意方式趋近于零,即逼近 M 点,用极限表示即为

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

但上式极限与 C 所围的面元的方向有关,这里借用了流体力学的概念。例如,在流体情形中,某点附近的流体沿着一个面呈旋涡状流动时,形成一个旋涡流体场,如图1.20所示。如果 C 围成的面元与旋涡面方向重合,则上述极限有最大值;如果所取面元和旋涡面元之间有一夹角,则得到的极限值总是小于最大值;而当面元和旋涡面相互垂直时,极限值等于零。由此可知,此极限乃是某一矢量在面元上的投影。

当面元法向矢量 \mathbf{e}_n 与旋涡轴方向相互重合时,上述极限值为最大值,这个值也就是某一矢量的模,这个矢量称为 \mathbf{A} 的旋度,记为 $\text{rot } \mathbf{A}$ 。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left. \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right|_{\max} \quad (1.61)$$

式(1.61)表示了 $\text{rot } \mathbf{A}$ 矢量在面元法向矢量 \mathbf{e}_n 方向上的投影, 由定义可看出, 这个极限式与所取面元的形状无关, 它只表示矢量 \mathbf{A} 的旋度在某一确定面元法向矢量 \mathbf{e}_n 方向上的投影。

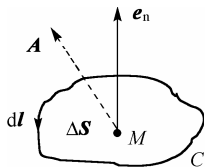


图 1.19 矢量的旋度

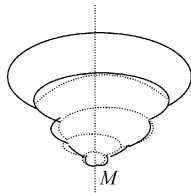


图 1.20 流体的漩涡

在笛卡儿坐标系中, 若要求得矢量场中某一点 M 的旋度, 就必须分别求出在三个坐标面方向的旋度矢量的分量, 这三个旋度分量之和便是该点的旋度矢量。由旋度的定义可以看出, 定义式中的极限与所取面元的形状无关。如图1.21所示, 如果要求出矢量场中点 M 的旋度, 首先可求出 yOz 坐标面的旋度矢量, 也就是沿 x 方向的旋度矢量。

以 M 为顶点, 取一个平行于 yOz 坐标面的矩形面元, 选 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 顺序绕行方向, 则面元矢量沿正 x 轴方向的大小为

$$\Delta S_x = \mathbf{e}_x \Delta y \Delta z$$

设 M 点的矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$, 则

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_3 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_4 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_y dy + \int_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z dz + \int_3 \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{e}_y) dy + \int_4 \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{e}_z) dz \\ &= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - A_z \Delta z \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

式中, $\frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y$ 和 $\frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z$ 分别是 M 点处矢量 \mathbf{A} 的分量 A_z 和 A_y 分别经过 Δy 和 Δz 段的变化量。

所以

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1.62)$$

这就是 $\text{rot } \mathbf{A}$ 在 ΔS_x 上的投影, 也就是 $\text{rot } \mathbf{A}$ 在 x 轴上的投影 (这里的推导也可看成是假设有一旋度矢量沿 x 方向, 取一面元方向也沿 x 轴, 所得结果即为极限的最大值)。

同理, 取面元 ΔS_y 和 ΔS_z , 它们分别平行于 y 轴和 z 轴, 于是可得 $\text{rot } \mathbf{A}$ 在 y 轴上的投影为

$$\text{rot}_y \mathbf{A} = \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

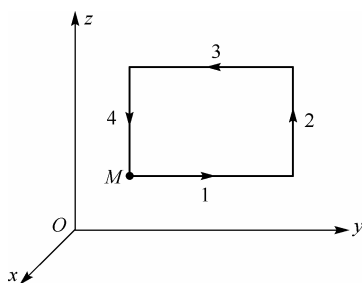


图 1.21 推导旋度公式用图

$\text{rot } \mathbf{A}$ 在 z 轴上的投影为

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

由此可得到：任一矢量 \mathbf{A} 在 M 点的旋度矢量应为三个分量的矢量之和，即

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \mathbf{e}_x \text{rot}_x \mathbf{A} + \mathbf{e}_y \text{rot}_y \mathbf{A} + \mathbf{e}_z \text{rot}_z \mathbf{A} \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.63)$$

为了方便记忆，可用行列式表示为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.64)$$

在圆柱坐标系中，坐标变量分别为 r 、 φ 、 z ，其旋度为

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (1.65)$$

用行列式表示为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (1.66)$$

在球坐标系中，

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{e}_R}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi) \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

用行列式表示为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_R}{R^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{e}_\theta}{R \sin \theta} & \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_R & R A_\theta & R \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (1.68)$$

旋度的一个重要性质是：任何一个矢量的旋度的散度恒等于零。用数学公式可表示为

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.69)$$

这是一个重要的恒等式，下面在笛卡儿坐标系中予以证明。

证明： $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[\mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

因为旋度和散度的定义与所采用的坐标系无关，所以上面的结论对任意矢量都是普遍适用的。由此可知，如果一个矢量 \mathbf{B} 的散度恒等于 0，即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，则 \mathbf{B} 可以表示为另一个矢量的旋度，即 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。这是引入矢量位函数的理论根据，在第 2 章和第 4 章中将做进一步的分析讨论。

根据 ∇ 所具有的矢性和微分双重性质，可以证明旋度运算符合如下规则：

$$\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

式中， ϕ 为标量函数。上式中出现了 $\nabla^2 \mathbf{A}$ 项，在数学上将 ∇^2 称为拉普拉斯算子，并且有 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 。

∇^2 可看成是一个标量算符，也是一个微分算符，并且在笛卡儿坐标系中有

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.70)$$

标量场 u 的拉普拉斯运算表示为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.71)$$

矢量场 \mathbf{A} 的拉普拉斯运算则为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.72)$$

可以证明，在笛卡儿坐标系下

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z \quad (1.73)$$

注意：当算子 ∇^2 作用在标量函数上时，称为标性拉普拉斯运算；当 ∇^2 作用在矢量函数上时，称为矢性拉普拉斯运算，两者是不同的二阶微分运算。

在圆柱坐标系下，拉普拉斯算子的表达式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.74)$$

在球坐标系下, 拉普拉斯算子的表达式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.75)$$

例 1.3 试证明 $\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = -\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$, 式中 S 为包围体积 V 的封闭面。

证明: 设 \mathbf{C} 为一任意常矢量, 运用旋度运算规则, 有

$$\nabla \square (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \square (\nabla \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \square (\nabla \times \mathbf{A}) = -\mathbf{C} \square (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\text{从而有} \quad \int_V \nabla \square (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) dV = -\mathbf{C} \square \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV$$

根据散度定理, 上式左边等于

$$\oint_S (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \square d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{A} \times d\mathbf{S}) \square \mathbf{C} = \mathbf{C} \square \oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

$$\text{于是得} \quad \mathbf{C} \square \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = -\mathbf{C} \square \oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

由于上式中常矢量 \mathbf{C} 是任意的, 故得证。

1.4.3 斯托克斯定理

斯托克斯定理是矢量分析中另一个重要定理, 该定理描述为: 一个矢量函数的环量等于该矢量函数的旋度对该闭合曲线所包围的任意曲面的积分。用数学表达式可表示为

$$\oint_l \mathbf{A} \square d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \square d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \square d\mathbf{S} \quad (1.76)$$

即一个矢量场的旋度对某一曲面的曲面积分, 等于该矢量沿此曲面周界的曲线积分。其证明类似于高斯散度定理的证明, 即把整个曲面 S 分成 N 个小面元, 整个曲面 S 的积分等于所有小面元之和, 然后由旋度的定义式

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i \square (\Delta S_i) = \oint_l \mathbf{A} \square d\mathbf{l}$$

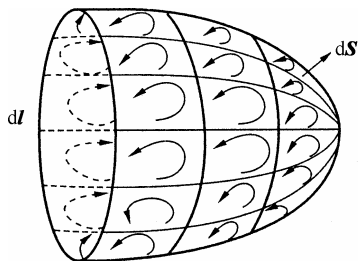


图 1.22 积分曲面的细分

可知, 相邻面元的轮廓线之间方向总是相反的, 内部曲线上的积分互相抵消, 结果变为矢量 \mathbf{A} 沿曲面轮廓线的积分, 如图1.22所示。

对比旋度和散度的公式可以看出, 旋度描述的是场分量沿着与它相垂直的方向上的变化规律, 即

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

所以, 矢量场的旋度是一个矢量函数。而散度描述的是场分量沿着各自方向上的变化规律, 即

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \square \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

所以, 矢量场的散度是一个标量函数。

旋度表示旋涡源与其产生的场之间的关系, 如果在矢量场空间, 场的旋度处处等于零,

则这种场称为无旋场或保守场。散度表示通量源与其产生的场之间的关系,如果在矢量场空间,场的散度处处为零,则这种场称为无散场或管形场。在实际的物理世界中,通常都存在着由通量源和旋涡源共同产生的矢量场,如运动电荷所产生的场。当然,也可能在有限的区域内,存在着既无散又无旋的无源矢量场,这种场称为调和场。

1.5 标量函数的方向导数与梯度

电磁场是矢量场,矢量场一般都要用矢量(矢量函数)来描述,但矢量在进行微积分运算时相比起标量的运算来说要麻烦得多。在一定条件下,矢量场是可以标量(标量函数)来描述的,这样就可以简化运算。由矢量和标量的定义可知,二者之间的差别就是:矢量既有大小又有方向,而标量却有大小无方向。那么,在什么条件下,矢量场才可以用标量来描述呢?

在研究标量场时,常常关心的是标量函数值随空间位置的变化规律,即标量函数最大变化率及其方向。标量函数在空间的最大变化率及其方向正是下面所要讨论的标量函数的**梯度**,本节将首先引入标量场的**方向导数**,并根据方向导数导出标量函数的梯度。

1.5.1 标量场与等值面

如果对一个场的空间分布只考虑大小,不考虑方向,这个场就是标量场。标量场可以用一个标量函数来表示;反之,能用一个标量函数来表示的场就是标量场。这个标量函数其实就是一个只考虑大小、不考虑方向的物理量。例如,设空间的温度分布函数为 u ,则 $u = u(x, y, z)$ 就描述了一个标量场;又如,电场中的电位分布可用标量函数 ϕ 来表示,则 $\phi = \phi(x, y, z)$ 也描述了一个标量场。

如图1.23所示,对于一个标量函数 $u = u(x, y, z)$,当 $u(x, y, z) = C$ (C 为常数)时,便可得到一个空间曲面。在这个曲面上,各点的坐标值 x 、 y 、 z 虽然不同,但函数值却都是相等的,这些函数值相等的点所组成的曲面称为标量场的等值面。例如,温度场中的等值面,就是温度相同的点所组成的等温面;电位场中的等值面,就是电位相同的点所组成的等位面。

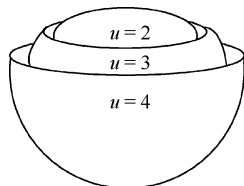


图 1.23 等值面

等值面具有如下性质:标量场中每一点都有一个等值面通过,且只有一个。也就是说,等值面充满整个标量场所在的空间,且互不相交。

1.5.2 方向导数

标量场的等值面能够帮助我们直观地了解物理量在整个场中的分布规律,但却不能研究标量场的某个局部情况,如标量场中某一点在各个方向的变化情况,这时就得借助方向导数这个概念。

如图1.24所示,设 M_0 为标量场 $u = u(M)$ 中的一点,从 M_0 点出发引出一条射线 l ,在 l 上与 M_0 点邻近取一动点 M ,设 $\vec{M_0M} = \Delta l$,由于 M 点在 l 上是一动点,所以 Δl 是变量。由偏导数的定义,函数 u 在 M_0 点沿 l 方向的偏导数为

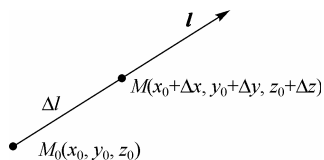


图 1.24 射线上的动点

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad (1.77)$$

式中, $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$ 称为函数 $u(M)$ 在 M_0 点处沿 l 方向的方向导数。

注意: 当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$ 时, 表示 $u(M)$ 沿 l 方向是增加的; 当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} < 0$ 时, 表示 $u(M)$ 沿 l 方向是减少的; 当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = 0$ 时, 表示 $u(M)$ 沿 l 方向无变化, 或是在等值面内移动。

在笛卡儿坐标系中, 标量函数 $u = u(M)$ 可写成 $u = u(x, y, z)$, 设有一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且函数 u 在 M_0 处可微, 而 M 点可用 $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 表示, 且 $M_0 M = \Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, 则

$$\Delta u = u(M) - u(M_0) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \Delta x + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \Delta y + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \Delta z \quad (1.78)$$

设 M_0 的值为 u , 则 M 的值为 $u + \Delta u$, 又设 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 l 的方向余弦, 则有

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta l \cos \alpha \\ \Delta y = \Delta l \cos \beta \\ \Delta z = \Delta l \cos \gamma \end{cases} \quad (1.79)$$

当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, 将式(1.79)代入式(1.78)并取极限, 可得

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cos \gamma \quad (1.80)$$

式中, $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 。在式(1.80)中略去下标 M_0 , 即得到笛卡儿坐标系中任意固定点沿 l 方向的方向导数表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.81)$$

其中, 当 l 用单位矢量表示为 $l = l_x \mathbf{e}_x + l_y \mathbf{e}_y + l_z \mathbf{e}_z$ 时, 方向余弦也可表示为

$$\cos \alpha = l_x / \Delta l, \quad \cos \beta = l_y / \Delta l, \quad \cos \gamma = l_z / \Delta l \quad (1.82)$$

可见, 方向导数表示函数 u 在一给定点处沿某一方向的方向余弦的变化率。

1.5.3 梯度

那么函数 $u(M)$ 沿哪个方向的变化率最大呢? 最大变化率又是多少呢? 首先来分析方向导数的公式

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.83)$$

式中, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 l 方向的方向余弦。现在沿 l 方向上取一单位矢量 \mathbf{e}_l , 那么将 \mathbf{e}_l 用笛卡儿坐标系的单位矢量来表示, 可得

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma \quad (1.84)$$

假设有一矢量 \mathbf{G} , 并且

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l \quad (1.85)$$

从上述分析可知, 矢量 \mathbf{G} 在给定点处为一固定矢量, 它只与函数 $u(x, y, z)$ 有关, 与 l 无关; 而 \mathbf{e}_l 则是从给定点引出的模为 1、沿 l 方向的任一射线上的单位矢量, 它与函数 $u(x, y, z)$ 无关。但从式 (1.85) 可以看出, \mathbf{G} 在 l 方向上的投影正好等于函数 $u(x, y, z)$ 在该方向的方向导数; 另外, 当方向 l 与 \mathbf{G} 的方向一致时, $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取得最大值, 并且 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} = |\mathbf{G}|$ 。也就是说, 矢量 \mathbf{G} 的方向就是函数 $u(x, y, z)$ 变化率最大的方向, 其大小正好是这个最大变化率的数值, 如图 1.25 所示。因此, 把矢量 \mathbf{G} 称为函数 $u(x, y, z)$ 在给定点处的梯度, 记为

$$\text{grad} u = \mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.86)$$

上述定义与坐标系无关, 是由函数分布所决定的, 但其表达式随不同坐标系而不同。

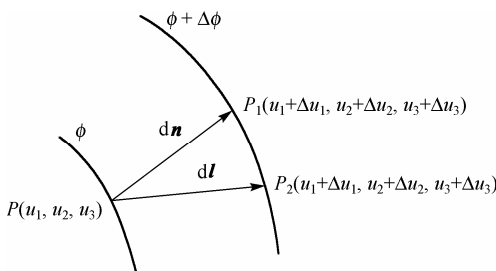


图 1.25 标量场的梯度

在笛卡儿坐标系中,

$$\mathbf{G} = \text{grad} u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.87)$$

在圆柱坐标系中,

$$\mathbf{G} = \text{grad} u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.88)$$

在球坐标系中,

$$\mathbf{G} = \text{grad} u = \mathbf{e}_R \frac{\partial u}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (1.89)$$

又因为在笛卡儿坐标系中,

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.90)$$

在圆柱坐标系中,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.91)$$

在球坐标系中,

$$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.92)$$

因此,梯度可表示为

$$\text{gradu} = \nabla u \quad (1.93)$$

于是可将式(1.85)重新写为

$$\partial u / \partial l = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l = \nabla u \cdot \mathbf{e}_l \quad (1.94)$$

或改写为

$$\text{d}u = \nabla u \cdot \text{d}\mathbf{l} \quad (1.95)$$

标量函数的梯度有如下性质:

(1) 一个标量函数的梯度 ∇u 是一个矢量函数。梯度的方向就是函数 u 变化率最大的方向, 即与等值面垂直的法线方向, 并且梯度的模等于函数 u 在该点的最大变化率的数值。

(2) 在标量场中任意一点 M 处的梯度垂直于过该点的等值面, 且指向函数 $u(M)$ 增大的方向。

(3) 函数 u 在给定点处沿任意 \mathbf{l} 方向的方向导数, 等于函数 u 的梯度在 \mathbf{l} 方向上的投影, 即

$$\partial u / \partial l = G \cos(\mathbf{G}, \mathbf{l})$$

(4) 梯度的重要性质: 梯度的旋度恒等于零。其数学表达式为

$$\text{rot}(\text{gradu}) = \nabla \times \nabla u = 0 \quad (1.96)$$

这是一个很容易证明的重要恒等式, 它说明: 对于一个矢量, 如果已知它的旋度处处为零, 则可以把它表示为一个标量函数的梯度, 即这个矢量场可以用这个标量函数来描述。

于是, 我们就完成了最初的命题, 即一个矢量场可用一个标量函数来描述的条件。

可以证明, 梯度运算有如下规则:

$$\begin{aligned} \nabla(\phi \pm \psi) &= \nabla \phi \pm \nabla \psi, & \nabla(\phi \psi) &= \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi, & \nabla \left(\frac{\phi}{\psi} \right) &= \frac{1}{\psi^2} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \\ \nabla f(\phi) &= f'(\phi) \nabla \phi, & \nabla \times \nabla \phi &= 0, & \nabla \cdot \nabla \phi &= \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

式中, ϕ 和 ψ 均为标量函数。

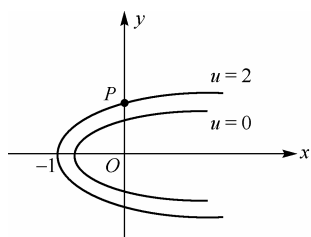


图 1.26 标量函数 u 的等位面

例 1.4 如图1.26所示, 一个三维标量场 $u = y^2 - x$, 求此标量场的等值面, 并求 u 的梯度 ∇u 的表达式及点 $P(0, \sqrt{2})$ 处的梯度。

解: u 是 x, y 的函数, 与 z 无关, 可视为二维场, 它在 z 等于常数的平面上的分布是相同的。

因此, u 取某一常量 C 时, $y^2 = x + C$ 为一抛物线, 所以等值面是抛物柱面。

$$\begin{aligned}\nabla u &= \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \mathbf{e}_x(-1) + \mathbf{e}_y(2y) + 0 \\ &= -\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

其大小为

$$|\nabla u| = \sqrt{(-1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 + 4y^2}$$

其方向为过等值面上某一点的法线方向, 可用单位矢量 \mathbf{e}_n 表示为

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = (1 + 4y^2)^{-1/2}(-\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y) = \frac{1}{3}(-\mathbf{e}_x + 2\sqrt{2}\mathbf{e}_y)$$

在 P 点的梯度为

$$\nabla u|_P = -\mathbf{e}_x + 2\sqrt{2}\mathbf{e}_y$$

例1.5 空间中两点, 分别是 $M(x, y, z)$ 和 $M(x', y', z')$, 两点之间的距离为

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \text{ 用符号 } \nabla' \text{ 表示对 } x', y', z' \text{ 微分, 即 } \nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}, \text{ 试证明 } \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}.$$

解: 比较 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$, 一般场点以 x, y, z 为变量, 源点以 x', y', z' 为变量。只需证明

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)$$

即可得证。这是一个很重要结论, 在本课程后面的学习中, 将多次应用该结论。

1.6 格林公式

格林公式又称为格林定理, 是矢量分析中的重要公式。在电磁场理论中, 在研究解的唯一性和电磁辐射及电磁波传播等问题中经常用到。

1. 第一格林公式

已知散度定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.97)$$

式中, \mathbf{n} 为法向矢量。令 \mathbf{A} 等于一个标量函数 ϕ 和一个矢量函数 $\nabla\psi$ 的乘积, 则

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\end{aligned}$$

由式(1.97)可得到第一格林公式

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (1.98)$$

2. 第二格林公式

若将式(1.98)中的 ϕ 和 ψ 互换,则有

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (1.99)$$

将式(1.98)与式(1.99)相减,就得到第二格林公式

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (1.100)$$

1.7 亥姆霍兹定理

1.7.1 散度和旋度的比较

我们引入的散度和旋度是用来描述矢量场的两个物理量,那么用散度和旋度是否能唯一地确定一个矢量场呢?亥姆霍兹定理回答了这个问题。为便于从概念上理解该定理,先来比较一下散度和旋度的区别:

(1) 矢量场的散度是一个标量函数,而矢量场的旋度却是一个矢量函数;

(2) 散度表示场中某点的通量密度,它是场中任一点通量源强度的量度;而旋度表示场中某点的最大环量强度,它是场中任一点处旋涡源强度的量度;

(3) 从散度公式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

可知,它取决于场分量 A_x 对 x 的偏导数、 A_y 对 y 的偏导数及 A_z 对 z 的偏导数。所以,散度由各场分量沿各自方向上的变化率来决定。而由旋度公式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

可知,它取决于 A_x 分量对 y 、 z 的偏导数、 A_y 对 x 、 z 的偏导数及 A_z 对 y 、 x 的偏导数。所以,旋度由各场分量在与之正交方向上的变化率来决定。

以上比较说明,散度表示矢量场中各点的场与通量源的关系,而旋度表示场中各点场与旋涡源的关系。因此,场的散度和旋度一旦给定,就意味着场的通量源和旋涡源就确定了。既然场总是由源所激发的,通量源和旋涡源的确定便意味着场已确定,因而可得出下述亥姆霍兹定理给出的结论。

1.7.2 亥姆霍兹定理

根据前面几节的讨论可知,一个矢量场的散度和旋度说明了矢量场所具有的性质,而且可以证明:在有限区域 V 内的任一矢量场,由它的散度、旋度和边界条件(即限定区域 V 的闭合面 S 上矢量场的分布)唯一地确定,这就是亥姆霍兹定理的核心内容。

产生矢量场的源要么是通量源，要么是旋涡源，要么是二者兼有。散度对应的是通量源，旋度对应的是旋涡源，所以当散度和旋度确定后，产生场的源就确定了，这时一旦边界条件确定，那么场就唯一地被确定了。

亥姆霍兹定理告诉我们，研究一个矢量场必须从它的散度和旋度两个方面着手，也就是说，要确定一个矢量或一个矢量描述的矢量场，必须同时确定该矢量的散度和旋度；相反，当一个矢量的散度和旋度被同时确定之后，该矢量或矢量场才被唯一的确定。因此，矢量场的散度应满足的关系及旋度应满足的关系决定了矢量场的基本性质。亥姆霍兹定理的意义是非常重要的，它是研究电磁场性质和规律的一条主线，无论研究静态电磁场还是时变电磁场，都必须从研究电场和磁场的散度与旋度及边界条件入手。

1.8 矢量场的分类

矢量场可以根据散度和旋度分为无旋场、无源场和有旋有源场。

1. 无旋场

如果在场中每一点上都有 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ，则该场没有旋涡源，称矢量场 \mathbf{F} 为无旋场。根据式(1.96)可以推知，该矢量场可以表示为一个标量场的梯度，即存在一个标量函数 ϕ ，使得

$$\mathbf{F} = -\nabla \phi \quad (1.101)$$

式中，函数 ϕ 称为无旋场 \mathbf{F} 的标量位函数，简称标量位。上式中冠以一个负号，是由于电磁场中 \mathbf{F} 的方向为 ϕ 减小最快的方向，此式说明可以在电场中引入电位函数来描述电场这个矢量场。

由斯托克斯定理可知，无旋场 \mathbf{F} 沿任何闭合路径 C 的环量恒等于零，即

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这一结论等价于无旋场的曲线积分 $\int_p^q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 与路径无关，只与起点 p 和终点 q 有关。静电场和恒定电场即属于无旋场。

2. 无源场

如果在场中每一点上都有 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ，则该场没有通量源，称这种场为无源场。由式(1.69)可知，无源场 \mathbf{F} 可以表示为另一个矢量场的旋度，即存在一个矢量函数 \mathbf{A} ，使得

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.102)$$

式中， \mathbf{A} 称为无源场 \mathbf{F} 的矢量位函数，简称矢量位。利用散度定理可以得出，无源场 \mathbf{F} 通过任何闭合曲面 S 的通量都等于零，即 $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，磁场就属于此类，即磁场不可能由通量源产生。

3. 有旋有源场

一般的矢量场将同时具有非零的散度和非零的旋度，时变电磁场和运动电荷产生的电场就是此类，此时有

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho \quad (1.103)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (1.104)$$

这里的 ρ 表示通量源, \mathbf{J} 表示旋涡源, 它们均为已知。根据亥姆霍兹定理, 一个普通矢量场 \mathbf{F} 可以分解为无旋部分 \mathbf{F}_i (保守场) 和无源部分 \mathbf{F}_ρ (管形场), 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_\rho$$

其中 \mathbf{F}_i 和 \mathbf{F}_ρ 分别满足

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_i = \rho \quad (1.105)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.106)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\rho = 0 \quad (1.107)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_\rho = \mathbf{J} \quad (1.108)$$

由式(1.106)和式(1.107)可以定义一个标量位函数 ϕ 和一个矢量位函数 \mathbf{A} , 使得

$$\mathbf{F}_i = -\nabla \phi, \quad \mathbf{F}_\rho = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\text{则有} \quad \mathbf{F} = -\nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.109)$$

从式(1.109)可知: 若矢量场 \mathbf{F} 在无限空间中处处单值, 且其导数连续有界, 而源分布在有限区域中, 则矢量场由其散度和旋度唯一地确定。并且, 它可表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和。

本章小结

1. 若一个物理量既有大小又有方向, 则它是一个矢量。在笛卡儿坐标系中, 矢量 \mathbf{A} 可表示为 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$, \mathbf{A} 的单位矢量为 $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \mathbf{e}_x \frac{A_x}{A} + \mathbf{e}_y \frac{A_y}{A} + \mathbf{e}_z \frac{A_z}{A}$, 其中 $A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$ 为矢量 \mathbf{A} 的模。

2. 矢量 \mathbf{A} 穿过曲面 S 的通量为 $\Phi = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。 \mathbf{A} 在某点的散度定义为

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

矢量的散度是标量, 表示从该点散发的通量体密度, 它描述了该点的通量源强度。

在笛卡儿坐标系中,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

高斯散度定理:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

散度的性质: 旋度的散度恒等于零。于是, 当一个矢量的散度恒为零时, 该矢量可以表示为另一个矢量的旋度。

3. 矢量 \mathbf{A} 沿闭合曲线 l 的线积分 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 称为 \mathbf{A} 沿该曲线的环量。矢量 \mathbf{A} 在某点的旋度定义为

$$\text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left[\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}}{\Delta S}$$

矢量的旋度还是矢量，其大小表示了最大环量面密度，它描述了场中旋涡源的强度。在笛卡儿坐标系中，

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

斯托克斯定理：

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

旋度的性质：梯度的旋度恒等于零。于是，当一个矢量的旋度恒为零时，该矢量可以表示成一个标量函数的梯度。

4. 标量 ϕ 在某点沿 l 方向的变化率 $\partial\phi/\partial l$ 称为 ϕ 沿该方向的方向导数。标量 ϕ 在该点的梯度 $\text{grad} \phi = \nabla \phi$ 与方向导数的关系为

$$\partial\phi/\partial l = \nabla \phi \cdot \mathbf{l}$$

标量 ϕ 的梯度是一个矢量，它的大小和方向就是该点最大变化率的大小和方向。

在笛卡儿坐标系中，

$$\nabla \phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

标量场中，相同 ϕ 值的点构成等值面。在等值面的法线方向上， ϕ 值变化最快。因此，梯度的方向也就是 ϕ 等值面的法线方向。该法线方向单位矢量可表示为

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

5. 算子 ∇ 是一个矢性微分运算符号。 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 可看成是两个矢量的标量积，在场的分析中， $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 定义为 \mathbf{A} 的散度。计算时，先按标量积规则展开，再作微分运算。 $\nabla \times \mathbf{A}$ 可看成是两个矢量的矢量积，在场的分析中， $\nabla \times \mathbf{A}$ 定义为 \mathbf{A} 的旋度。计算时，先按矢量积规则展开，再作微分运算。 $\nabla \phi$ 可看成是 ∇ 与 ϕ 相乘，将 $\nabla \phi$ 定义为梯度。

在笛卡儿坐标系 (x, y, z) 中，

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

在圆柱坐标系 (r, φ, z) 中，

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

在球坐标系 (R, θ, φ) 中,

$$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

∇u 为一矢量场, 若再对 ∇u 求散度, 则称为标量函数 u 的拉普拉斯运算, 记为 $\nabla^2 u$, 即

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$$

∇^2 可看成是一个标量算符, 称为拉普拉斯算符, 也是一个微分算符, 并且, 在笛卡儿坐标系中有

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

在圆柱坐标系下, 拉普拉斯算符表达式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

在球坐标系下, 拉普拉斯算符表达式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

在笛卡儿坐标系中, 标量场 u 的拉普拉斯运算表示为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

矢量场 \mathbf{A} 的拉普拉斯运算表示为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

可以证明, 在笛卡儿坐标系下,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z$$

6. 亥姆霍兹定理总结了矢量场的共同性质: 矢量场 \mathbf{F} 由它的散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 和它的旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 及边界条件唯一地确定。

矢量的散度和矢量的旋度各对应于矢量场的一种源, 所以分析矢量场时, 总是从研究它的散度和旋度着手, 散度方程和旋度方程构成微分形式的矢量场的基本方程。也可以从矢量穿过封闭的通量和沿闭合曲线的环量去研究矢量场, 从而得到积分形式的基本方程。

习 题 1

1.1 矢径 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ 与各坐标轴正向的夹角为 α 、 β 、 γ , 请用坐标 (x, y, z) 来表示 α 、 β 、 γ , 并证明 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。

1.2 已知 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x - 9\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$, 试求: (1) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; (2) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; (3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; (4) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

1.3 已知 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z$, 若使 $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ 及 $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, 则 b 和 c 各应是多少?

1.4 已知 $\mathbf{A} = 12\mathbf{e}_x + 9\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$, 若 $\mathbf{B} \perp \mathbf{A}$ 及 \mathbf{B} 的模为 1, 试确定 a 和 b 。

1.5 设 $\mathbf{A} = a_1\mathbf{e}_x + a_2\mathbf{e}_y + a_3\mathbf{e}_z$, $\mathbf{C} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, 求矢量场 $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ 的矢量线。

1.6 已知矢量场 $\mathbf{A} = (axz + x^2)\mathbf{e}_x + (by + xy^2)\mathbf{e}_y + (z - z^2 + cxz - 2xyz)\mathbf{e}_z$, 试确定 a 、 b 、 c , 使得 \mathbf{A} 成为一无源场。

1.7 如题 1.7 图所示, 设 S 为由柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 及平面 $z=0$ 和 $z=h$ 围成的封闭曲面, 求矢径 \mathbf{r} 穿出 S 面部分的通量。

1.8 已知 $\phi = 3x^2y$, $\mathbf{A} = x^2yz\mathbf{e}_y + 3xy^2\mathbf{e}_z$, 求 $\text{rot}(\phi\mathbf{A})$ 。

1.9 试证明: 矢量场 $\mathbf{A} = (y^2 + 2xz^2)\mathbf{e}_x + (2xy - z)\mathbf{e}_y + (2x^2z - y + 2z)\mathbf{e}_z$ 为无旋场。

1.10 求标量场 $\phi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程。

1.11 求函数 $\phi = 3x^2y - y^2$ 在点 $M(2, 3)$ 处沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大方向的方向导数。

1.12 求标量场 $\phi = 1/r$ 在过点 $M(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 的等值面上过该点的切平面方程。

1.13 求函数 $\phi = xy^2 + z^2 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角 $\alpha = \pi/3$ 、 $\beta = \pi/4$ 、 $\gamma = \pi/3$ 的方向导数。

1.14 求函数 $\phi = 3x^2y - y^3z^2$ 在点 $M(1, -2, -1)$ 处沿矢量 $\mathbf{A} = yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$ 方向的方向导数。

1.15 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿着点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 19)$ 的方向导数。

1.16 已知 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求在点 $(0, 0, 0)$ 和点 $(1, 1, 1)$ 处的梯度。

1.17 u 、 v 都是 x 、 y 、 z 的函数, u 、 v 各偏导数都存在且连续, 证明: (1) $\text{grad}(u+v) = \text{grad } u + \text{grad } v$; (2) $\text{grad}(uv) = v \text{grad } u + u \text{grad } v$; (3) $\text{grad}(u^2) = 2u \text{grad } u$ 。

1.18 试证明: (1) $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$; (2) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$ 。

1.19 已知 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, 试证明: (1) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$; (2) $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n+3)r^n$ 。

1.20 已知 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, 试证明: (1) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$; (2) $\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r} = 0$;

(3) $\nabla \times \left[\frac{\mathbf{r}}{r} f(r)\right] = 0$ [$f(r)$ 是 r 的函数]。

1.21 试证明: (1) $\nabla \times (c\mathbf{A}) = c\nabla \times \mathbf{A}$ (c 为常数); (2) $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A}$ 。

1.22 试证明: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ 。

1.23 应用散度定理计算积分 $I = \iiint_S [xz^2\mathbf{e}_x + (x^2y - z^3)\mathbf{e}_y + (2xy + y^2z)\mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{n} dS$, 其中 S 是 $z=0$ 和 $z=(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ 所围成的半球区域的外表面。

1.24 设 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 和 $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ 是具有二阶连续偏导数的两个矢性函数, 它们又满足方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

试证明: \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 均满足 $\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$ (\mathbf{A} 等于 \mathbf{E} 或 \mathbf{H})。

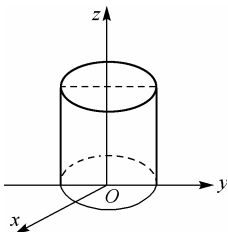
1.25 试证明: $\nabla^2(uv) = u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \cdot \nabla v$ 。

1.26 试证明下列函数满足拉普拉斯方程。

(1) $\phi(x, y, z) = \sin \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z} (\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2)$

(2) $\phi(r, \varphi, z) = r^{-n} \cos n\varphi$

(3) $\phi(R, \theta, \varphi) = R \cos \theta$



题 1.7 图

1.27 对以下各种情况, 试求 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 和 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。

(1) $\mathbf{A} = xy^2z^3\mathbf{e}_x + x^3z\mathbf{e}_y + x^2y^2\mathbf{e}_z$

(2) $\mathbf{A}(r, \varphi, z) = r^2 \cos \varphi \mathbf{e}_r + r^2 \sin \varphi \mathbf{e}_z$

(3) $\mathbf{A}(R, \theta, \varphi) = R \sin \theta \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R^2} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi$

1.28 设 $\phi(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{R} e^{-kR}$ (k 为常数), 试证明 $\nabla^2 \phi = k^2 \frac{e^{-kR}}{R}$ 。

1.29 试证明 $\mathbf{A} = yz\mathbf{e}_x + zx\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$ 为调和场, 并求出场的位函数 ϕ (ϕ 也称为调和函数)。

第2章 电场、磁场与麦克斯韦方程

电场与磁场的基本定律是麦克斯韦于 1873 年建立的。麦克斯韦是继法拉第之后，集电磁学大成的伟大科学家，他依据库仑、高斯、欧姆、安培、毕奥-萨伐尔、法拉第等前人的一系列发现和实验成果，建立了第一个完整的电磁理论体系。他不仅科学地预言了电磁波的存在，而且还揭示了光、电、磁现象本质的统一性，完成了物理学的又一次大综合。这一自然科学的成果，奠定了现代电力工业、电子工业和无线电工业的基础。

电磁学的发展过程，经历了与牛顿力学的类比，以及对其类比中所产生的某些规律的否定。本章也从力的类比和描述入手，引入场的概念。本章在引入电场强度与电位的概念、磁感应强度与磁位的概念及电偶极子和磁偶极子的概念后，回顾了电荷在电场和磁场中所受到的两种作用力，即电场力与磁场力，它们分别用电场强度矢量 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} (\mathbf{B} 也称为磁通密度) 来表示。当空间中同时存在电场和磁场时，电荷所受到的力则称为洛伦兹力。接下来讨论用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 表示的微分形式的麦克斯韦方程组，在对这组方程所依据的实验结果做简短的分析之后，就可以对麦克斯韦方程组所包含的丰富内容进行深入的探索。

从本章的叙述可以看到，麦克斯韦在 19 世纪所创立的电磁场理论实际上是建立在电磁学的三大实验定律——库仑定律、安培定律和法拉第定律之上的。然而，当深入了解了麦克斯韦的电磁场理论所具有的内涵之后将会发现，他的理论已远远升华到了引导科学乃至世界发生巨大变化的高度。

在电磁学的三大实验定律中，实际上只有库仑定律是可以用经典物理学的测量方法进行直接的实验检验的。而安培定律和法拉第定律本身却难以直接用实验检验，并且其精度不明。在麦克斯韦理论建立之前，这两个定律只是描述了存在于电和磁之间相互作用的某些定性的规律。而电与磁，或者说电场与磁场相互之间严格的数学关系及物理内容，实际上正是通过麦克斯韦的工作才确立起来的。从这个意义上来说，在经典电磁学定律向电磁场理论发展的过程中，一种能够反映物质世界新规律的数学方法也构成了整个理论的重要基础，这个数学方法就是矢量场论，麦克斯韦正是矢量场论这一重要数学领域的奠基人之一。本章使用矢量场论的数学方法分别描述了微分形式、积分形式和时谐形式的麦克斯韦方程组，并且通过对麦克斯韦方程组所进行的数学变换，导出了电磁场的能量关系——坡印廷定理。

本章对于传导电流、运流电流、位移电流及电流连续性原理的讨论具有很重要的意义。假设“位移电流”，并由电荷守恒定律导出电流连续性方程，正是麦克斯韦的一种天才表现。从中可以发现，麦克斯韦并不像他同时代的其他科学家那样，只是在牛顿理论所给出的物理和数学框架内摸索。当牛顿数学无法满足他想达到的目标时，麦克斯韦创立了新的数学运算方法；当原有的经典电磁学实验在新的数学方法下还不足以得到波的运动形式时，他就在经典电磁学所能得到的“安培定律”中加上自己的“位移电流”；当得到的电磁场方程组的形式是当时尚无法求解的矢量波动方程形式时，他就用可以作为其中特解的标量波动方程来代替它，从而得到了真空中电磁波的传播速度；而一旦得知电磁波在真空中的传播速度等于光速时，他就满怀信心地指出：光就是电磁波的一种形式，这正是麦克斯韦电磁场理论最本质的

东西。麦克斯韦发现了一种新的物质运动形式,这一发现改变了人类对于世界的认识,改变了人类的生产技术手段,甚至改变了人类的生活方式。

2.1 电场力、电场强度与电位

2.1.1 电场力与电场强度

实验表明,电荷之间存在着作用力。一个电荷受到另一个或多个电荷的作用力时存在着两种情况,其中一种情况是所有电荷均处于静止状态。在这种情况下,每两个静止电荷(假设为点电荷)之间的作用力可由库仑定律来描述。库仑是一个法国物理学家,以其名字命名的定律表明:两个点电荷 q' 及 q 之间的相互作用力的大小与 q' 及 q 的乘积成正比,与它们之间距离 R 的平方成反比;作用力的方向沿着它们的连线方向,同号电荷相斥,异号电荷相吸。库仑定律是电学发展史上的第一个定量规律,它使电学的研究从定性进入定量阶段,是电学史中的一个重要里程碑。

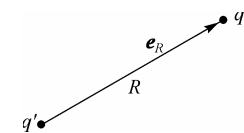


图 2.1 库仑定律的图示

令 \mathbf{F}_E 代表电荷 q' 作用于电荷 q 的电场力, \mathbf{e}_R 代表由 q' 指向 q 的单位矢量,如图2.1所示,则库仑定律的数学表达式为

$$\mathbf{F}_E = \frac{qq'}{R^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \mathbf{e}_R \quad (2.1)$$

\mathbf{F}_E 的方向由单位矢量 \mathbf{e}_R 来决定,这个矢量的大小为一单位长度,因此不会改变力 \mathbf{F}_E 的大小。在国际单位制中,电荷 q' 和 q 的单位为库仑(C),两电荷之间的距离 R 的单位为米(m),电场力 \mathbf{F}_E 的单位则为牛顿(N), ϵ_0 称为真空介电常数,其大小为 $\epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9}$ 法/米(F/m)。

式(2.1)说明,带电体周围的空间确实存在着一种特殊形式的物质,当电荷或带电体进入这个空间时将受到力的作用。我们将电荷周围存在的特殊物质称为电场,电场对电荷的作用称为电场力。

注意: 库仑定律所描述的是点电荷之间的作用力,点电荷的物理模型类似于力学中的“质点”,于是,它同样也满足牛顿力学所描述的力的作用关系。另外,库仑定律所描述的点电荷之间的作用力是在施力电荷静止的情况下才获得的。

库仑定律还可以换一种方式来阐述。假定电荷 $q=1\text{C}$,于是电场力 \mathbf{F}_E 即为 q' 对单位电荷的作用力,我们将这个特定大小的电场力(一个单位电荷受到另一个电荷的作用力) \mathbf{F}_E 称为电场强度矢量 \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{q'}{R^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \mathbf{e}_R \quad (2.2)$$

而作用在电荷 q 上的电场力 \mathbf{F}_E 可以在式(2.2)两边同乘以 q 得到:

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = \frac{qq'}{R^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \mathbf{e}_R \quad (2.3)$$

于是又回到了库仑定律。这样,根据单位电荷作用力定义的电场强度矢量 \mathbf{E} 可以得出两个或多个彼此相对静止的电荷之间的作用力。

电场强度矢量 \mathbf{E} 的单位是作用在单位电荷上的力,即为牛顿/库仑(N/C),国际单位制中则为伏特/米(V/m)。

以上结论是针对 q 为点电荷而言的, 如果电荷是沿一曲线连续分布的线电荷时, 则可引入线电荷密度的描述方式。线电荷密度 σ_l 定义为

$$\sigma_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (2.4)$$

式中, dq 为线元 dl 上所具有的电量, 其在空间产生的电场强度为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R = \frac{\sigma_l dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R$$

式中, R 为带电线元 dl 到场点的距离; \mathbf{e}_R 为线元指向场点的单位矢量。整个线电荷在空间产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\sigma_l dl}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (2.5)$$

如果电荷是沿一曲面连续分布的面电荷, 则可引入面电荷密度的描述方式。面电荷密度 σ_s 定义为

$$\sigma_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{ds} \quad (2.6)$$

式中, dq 为面元 dS 上所具有的电荷量, $dq = \sigma_s ds$ 。整个面电荷在空间产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma_s dS}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (2.7)$$

式中, R 为带电面元 dS 到场点的距离; \mathbf{e}_R 为面元指向场点的单位矢量。

如果电荷在某空间体积内连续分布时, 引入体电荷密度的描述方式。体电荷密度 ρ 定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (2.8)$$

式中, dq 为体积元 dV 中所具有的电荷量, $dq = \rho dV$ 。整个体电荷在空间产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho dV}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (2.9)$$

式中, R 为体积元 dV 到场点的距离; \mathbf{e}_R 为体积元指向场点的单位矢量。

2.1.2 电位

已知试验电荷 q 在电场中的受力为

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$$

在静电场中欲使试验电荷 q 处于平衡状态, 应有一外力 \mathbf{F}_W 与电场力 \mathbf{F}_E 大小相等、方向相反, 即

$$\mathbf{F}_W = -q\mathbf{E}$$

于是, 试验电荷 q 在静电场中由 A 点移动到 B 点时外力需做的功为

$$W = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

那么, 静电场内单位正电荷从 A 点移动到 B 点时外力所做的功则为

$$\frac{W}{q} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

我们将静电场内单位正电荷从 A 点移动到 B 点时外力所做的功称为 B 点和 A 点之间的电位差, 用 ϕ_{BA} 表示, 即

$$\phi_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.10)$$

在自由空间, 如果点电荷位于原点, 原点到场点 A 的距离为 R_A , 原点到场点 B 的距离为 R_B , 则 B 点和 A 点之间的电位差为

$$\phi_{BA} = - \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right)$$

积分表明, 空间两点 B 和 A 之间的电位差只与场点所在位置有关, 而与积分路径无关。因此, 在静电场中, 电场强度 \mathbf{E} 沿闭合回路的积分恒为零, 即

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

若单位正电荷是从无穷远处出发 ($R_A = \infty$) 移到 B 点的, 则电位差为

$$\phi_{B\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_B}$$

或写成

$$\phi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_B} \quad (2.11)$$

式(2.10)也可改写成具有普遍意义的式子:

$$\phi = - \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.12)$$

由此, 可以得到空间一段线元上两端点间的电位差为

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.13)$$

由式(1.95)可知

$$d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} \quad (2.14)$$

比较式(2.13)和式(2.14), 可得电位与电场强度的关系为

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (2.15)$$

式(2.15)提供了求解静电场中电场强度 \mathbf{E} 的一种方法, 即把求解电场强度 \mathbf{E} 的问题变成先求解电位 ϕ , 而后再通过微分关系求 \mathbf{E} 。一般情况下, 用这种方法比直接求解 \mathbf{E} 要简便。

2.2 磁场力、磁感应强度与磁位

2.2.1 磁场力与磁感应强度

一个电荷受到另一个或多个电荷的作用力时所存在着的另一种情况是: 电荷之间存在相对运动。观察两根载流导线时, 会发现另一种力, 它存在于这两线之间, 是运动的电荷即电流之间的作用力, 称其为磁场力。我们把存在于载流回路周围空间, 并且能对运动电荷施力的特殊物质称为磁场。磁场的特征是对运动电荷施力, 其施力的情况虽然比较复杂, 但我们可以用一个磁感应强度 \mathbf{B} 来描述它, 即将其定义为一个单位电流受到另一个电流的作用力。

假定电荷 q 以速度 \mathbf{v} 在磁场中运动, 它所受到的磁场力 \mathbf{F}_B 可以表示为

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.16)$$

正如式(2.2)通过作用力的来源——电荷 q' 来表示电场强度矢量 \mathbf{E} 一样, 式(2.16)中的 \mathbf{B} 同样也可以用产生它的电流来表示。

考虑磁场中载流线元 $I d\mathbf{l}$ 的受力情况, 由于

$$I d\mathbf{l} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} = dq \frac{d\mathbf{l}}{dt} = dq\mathbf{v}$$

所以

$$d\mathbf{F}_B = dq\mathbf{v} \times d\mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times d\mathbf{B} \quad (2.17)$$

根据安培力实验定律, 若真空中有两个电流回路, 如图 2.2 所示, 分别用 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 和 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 表示两回路的电流元, 则电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 和 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 之间的作用力为

$$d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (2.18)$$

式中, μ_0 称为自由空间的磁导率, 其大小为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)。

式(2.18)可改写为

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_R}{R^2} \right] \quad (2.19)$$

比较式(2.19)与式(2.17), 可得电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 在空间所产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (2.20)$$

式(2.20)称为毕奥-萨伐尔定律。运用叠加原理, 可得闭合回路 1 在空间所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (2.21)$$

式(2.21)是计算线电流周围磁感应强度的公式。磁感应强度 \mathbf{B} 的单位为牛顿/(安培·米) [N/(A·m)], 在国际单位制中 \mathbf{B} 的单位为特斯拉(T)。

如果电流是分布在某一曲面上时, 若面电流密度为 \mathbf{J}_S , 由 $I d\mathbf{l} = \mathbf{J}_S d\mathbf{S}$, 可得面电流在空间产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_S \times \mathbf{e}_R}{R^2} d\mathbf{S} \quad (2.22)$$

式中, R 为面元 $d\mathbf{S}$ 到场点的距离; \mathbf{e}_R 为面元指向场点的单位矢量。

如果电流是分布在某一体积内时, 若体电流密度为 \mathbf{J} , 由 $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} dV$, 可得体电流在空间产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV \quad (2.23)$$

式中, R 为体积元 dV 到场点的距离; \mathbf{e}_R 为体积元指向场点的单位矢量。

2.2.2 矢量磁位

2.2.1 节所定义的描述磁场基本特征的物理量——磁感应强度 \mathbf{B} 是一个矢量, 因而磁场是一个矢量场。根据通量的概念, 我们将穿过某一曲面的磁感应强度 \mathbf{B} 的通量称为穿过该曲面的磁通量, 用 Φ_m 表示, 其数学表达式为

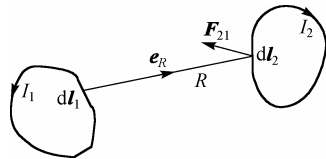


图 2.2 两电流回路间的作用力

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.24)$$

当空间曲面 S 为一个闭合曲面时, 有

$$\Phi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.25)$$

由毕奥-萨伐尔定律, 将式(2.21)代入式(2.25)得

$$\Phi_m = \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \frac{Id\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.26)$$

根据梯度规则, 有

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}$$

于是式(2.26)中的被积函数变成

$$\frac{Id\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times Id\mathbf{l}' \quad (2.27)$$

根据高斯定律, 有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

式(2.26)可改写为

$$\Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times Id\mathbf{l}' dV \right]$$

由于 ∇ 算子是对场点 (x, y, z) 的微分, 而线积分是针对源点 (x', y', z') 的, 所以 ∇ 算子可移入积分号内, 即

$$\Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \oint_{V'} \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times Id\mathbf{l}' \right] dV$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

可得

$$\nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times Id\mathbf{l}' \right] = Id\mathbf{l}' \cdot \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) - \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \nabla \times Id\mathbf{l}'$$

根据梯度的性质可知

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \equiv 0$$

又知 $Id\mathbf{l}'$ 是源点 (x', y', z') 的函数, 而 ∇ 是针对场点 (x, y, z) 的微分, 因此

$$\nabla \times Id\mathbf{l}' = 0$$

这表明整个积分为零, 即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (2.28)$$

由式(2.28)可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.29)$$

根据矢量运算规则：一个矢量旋度的散度恒等于零。于是可引入一个任意矢量 \mathbf{A} ，即令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.30)$$

这个从纯数学关系引入的矢量 \mathbf{A} 称为**矢量磁位**，矢量磁位的单位为韦伯/米(Wb/m)。

从上面的推导看，矢量 \mathbf{A} 还没有明确的物理意义，它可以是任意矢量。为了避免矢量 \mathbf{A} 的这种随意性，必须对其附加另外的约束，这个约束就是要给定矢量 \mathbf{A} 的散度。亥姆霍兹定理指出：对于某区域内的一个矢量场函数，可以通过给定它的旋度函数和散度函数及它在区域边界上的边界条件唯一地确定。给定旋度和给定散度是相互独立的，给定不同的散度将使该矢量的解不同，但不影响解的旋度，其旋度只由给定的旋度条件决定；同样，如何给定旋度也不影响该矢量的散度。由于引入矢量 \mathbf{A} 的目的只是为了通过式(2.30)计算场量 \mathbf{B} ，而不必考虑矢量 \mathbf{A} 本身的物理意义，因此可以根据计算方便的需要来给定矢量 \mathbf{A} 的散度。对于恒定磁场，一般选择

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.31)$$

式(2.31)称为矢量 \mathbf{A} 的库仑规范，这时，恒定磁场的矢量磁位 \mathbf{A} 由式(2.30)和式(2.31)共同定义。

将式(2.27)代入式(2.21)，可得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{V'} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{l}' \quad (2.32)$$

根据矢量恒等式关系，式(2.32)中

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{l}' = \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}'}{R} \right) - \frac{1}{R} (\nabla \times d\mathbf{l}')$$

由于 ∇ 算子是对场点 (x, y, z) 的微分，故 $\nabla \times d\mathbf{l}' = 0$ 。于是，式(2.32)可写为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{V'} \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}'}{R} \right) \quad (2.33)$$

由于式(2.33)中的积分和微分针对的是两组不同变量，所以可以改变式(2.33)的积分与微分顺序，即为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{V'} \left(\frac{d\mathbf{l}'}{R} \right) \right] \quad (2.34)$$

比较式(2.30)与式(2.34)，可得矢量磁位 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \quad (2.35)$$

或用面电流密度表示为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_s dS}{R} \quad (2.36)$$

或用体电流密度表示为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} dV}{R} \quad (2.37)$$

2.2.3 标量磁位

在2.1节中,我们引入了一个标量电位函数 ϕ 作为求解静电场的辅助函数。对于恒定磁场,是否也可以进行类似的引入呢?由矢量分析与场论的内容可知,要用一个标量函数 ϕ 表示一个矢量场 \mathbf{F} 时,应定义 $\mathbf{F} = \nabla\phi$ 或 $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ 。并且由于 $\nabla \times \nabla\phi = 0$,故要求矢量场 \mathbf{F} 必须是无旋场(即有势场)。对于静电场,因为 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$,故在整个电场空间定义 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 是成立的。但对于恒定磁场,安培环路定律 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 表明了磁场是一个有旋场,在有电流处磁场的旋度不为零。因此,在整个磁场空间内使用一个标量函数的梯度来表达磁场是不成立的。

但在许多磁场问题中,求解的空间只局限在没有电流的区域,此区域内可以保证 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 成立,这时就可以引入一个标量位函数 ϕ_m 来表示磁场。在静电场中与位函数 ϕ 对应的是电场强度 \mathbf{E} ,根据对偶性,可以把安培环路定律 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 写成

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu_0) = \mathbf{J}$$

$$\text{令} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 \quad (2.38)$$

称 \mathbf{H} 为磁场强度, \mathbf{H} 的单位为安培/米(A/m)。于是在恒定磁场中与位函数 ϕ_m 对应的就是磁场强度 \mathbf{H} ,即

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (2.39)$$

式中, ϕ_m 称为标量磁位,单位是安培(A)。

2.3 洛伦兹力

综上所述,我们通过对电场力和磁场力的分析,引入了电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 及电位 ϕ 和磁位 \mathbf{A} 。当一个电荷既受到电场力同时又受到磁场力的作用时,电场强度 \mathbf{E} 与磁感应强度 \mathbf{B} 会同时产生效应,称这样的合力 \mathbf{F} 为洛伦兹力,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$$

$$\text{并且} \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.40)$$

式(2.40)可看成是对电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的定义式。下面,我们就从这个式子出发来重新认识对 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的定义。

电荷在其周围的空间产生电场,它的表现是对于被引入到场中的其他电荷有电场力相作用,可以利用电荷在电场中受到的电场力来定义电场。

根据实验,当一个电量为 q 的试验电荷(正电荷)被引入电场时,它将受到这个电场对它的作用力 \mathbf{F} ,电场力 \mathbf{F} 的大小与试验电荷的电量 q 成正比。这意味着,电场力 \mathbf{F} 与试验电荷 q 的比值与试验电荷的大小无关,而只与试验电荷所处的位置有关。因此,将单位正电荷在某点所受到的电场力定义为该点的电场强度,记为 \mathbf{E} ,即

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.41)$$

当然,在上述定义中应假设试验电荷 q 是一个电量及尺度都足够小的点电荷,以至于它的引入对原有电场的影响可以忽略不计。

电流或运动电荷在其周围空间产生磁场，它的表现是对于被引入到场中的其他电流或运动电荷有磁场力相作用，可以利用电流或运动电荷在磁场中受到的磁场力来定义磁场。

根据实验，当一个电量为 q 的试验电荷以速度 \mathbf{v} 在磁场中经过某点时，运动电荷 q 在该点受到磁场对它的作用力为 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。此式表明，当 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 平行时，运动电荷受到的磁场力为零；而当 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 垂直时，运动电荷受到的磁场力达到最大 ($F_{\max} = qvB$)。因此，将磁场中某点的磁感应强度 \mathbf{B} 定义为这样一个矢量，它的大小等于磁场力最大值 F_{\max} 与乘积 qv 的比值并取 q 趋于零的极限，即

$$\mathbf{B} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{\max}}{vq} \quad (2.42)$$

当然，在上述定义中应假设运动的试验电荷 q 是一个电量及尺度都足够小的点电荷，使它不至于影响原有磁场的空间分布。式(2.42)只定义了磁感应强度 \mathbf{B} 的大小，它的方向要根据测得的 F_{\max} 和已知的 \mathbf{v} 这两者的方向来确定。

从式(2.40)可看出，静止电荷在磁场中不会受到磁场的作用力。对运动电荷而言，它所承受的磁场力始终与电荷运动速度矢量 \mathbf{v} 相垂直。这就表明，磁场力的作用仅能改变电荷运动速度的方向，而不能改变电荷运动速度的量值。因此，在自由空间中磁场力不做功。

2.4 电偶极子

在两个点电荷相互作用的各种情况中，有这样一种特殊情况，即将两个极性相反的等量电荷紧密地置放在一起，以此来模仿电子对，这是一种常见的场源电荷的存在形式。我们将这一对极性相反但非常靠近的等量电荷称为电偶极子。

如图2.3所示，假设组成电偶极子的两个电荷的电量分别为 $+q$ 和 $-q$ ，它们之间的距离为 d ，则它们在空间一点 $P(x, y, z)$ 的电位为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

式中， r_1 和 r_2 分别是两电荷到 P 点的距离。

如果两电荷沿 z 轴对称分布并且距离 P 点很远，如图2.4所示，则 r_1 和 r_2 可近似地表示为

$$r_1 = r - 0.5d \cos \theta, \quad r_2 = r + 0.5d \cos \theta$$

并且

$$r_1 r_2 = r^2 - (0.5d \cos \theta)^2 \approx r^2$$

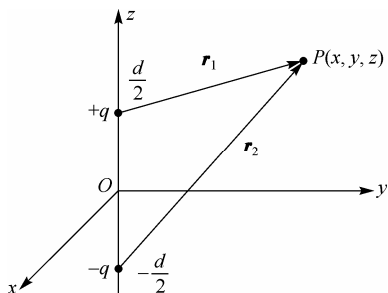


图 2.3 电偶极子

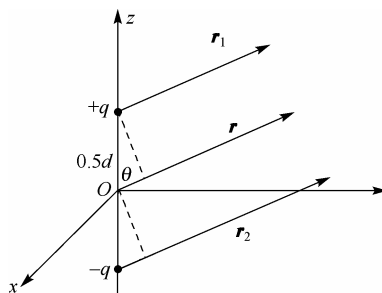


图 2.4 电偶极子远离 P 点

所以, P 点的电位变成

$$\phi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \theta}{r^2} \right) \quad (2.43)$$

从式(2.43)可以看出, 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 电偶极子平分面上的任意点处电位都为零。于是, 在这个平面上如果将电荷从一点移动到另一点是没有能量损耗的。

为了便于描述电偶极子, 我们定义一个电偶极矩 \mathbf{p}_e , 该矢量的大小为 $p_e = qd$, 而其方向则由负电荷指向正电荷, 即

$$\mathbf{p}_e = qd\mathbf{e}_z \quad (2.44)$$

于是, 式(2.43)可写成

$$\phi \approx \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.45)$$

例 2.1 如图2.5所示, 两个相距很近, 距离为 R_0 的等值异号电荷 $+q$ 和 $-q$ 构成一个电偶极子。矢量 \mathbf{R}_0 的方向从负电荷指向正电荷, \mathbf{R} 是从电偶极子指向电场中的任一点的矢量, 起点在正、负电荷连线的中点, 且 $R_0 \ll R$, 试根据点电荷的电场表达式

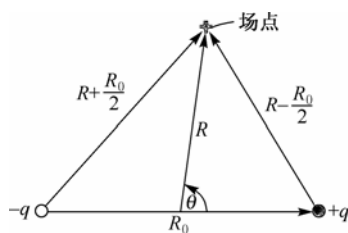


图 2.5 电偶极子产生的电场

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

证明电偶极子距离 R 处所产生的电场为

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{3qR_0 \cos \theta}{R^3} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) - \frac{q\mathbf{R}_0}{R^3} \right]$$

式中, θ 是 \mathbf{R}_0 和 \mathbf{R} 之间的夹角。若将电偶极矩 \mathbf{p}_e 定义为 $q\mathbf{R}_0$, 则上述表达式可写成

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{R^3} \right]$$

证明: 在静电场中, 任意一点处的电场强度可写为

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{q}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0/2|^2} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0/2)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0/2|} - \frac{q}{|\mathbf{R} + \mathbf{R}_0/2|^2} \frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}_0/2}{|\mathbf{R} + \mathbf{R}_0/2|} \right]$$

从电荷到场点的距离由余弦定理计算, 即

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0/2| = \left[R^2 + (R_0/2)^2 - 2R(R_0/2)\cos\theta \right]^{1/2}$$

$$|\mathbf{R} + \mathbf{R}_0/2| = \left[R^2 + (R_0/2)^2 - 2R(R_0/2)\cos(180^\circ - \theta) \right]^{1/2}$$

如果 $R_0 \ll R$, 则有

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0/2| = R \left(1 - \frac{R_0}{R} \cos\theta \right)^{1/2}$$

$$|\mathbf{R} + \mathbf{R}_0/2| = R \left(1 + \frac{R_0}{R} \cos\theta \right)^{1/2}$$

因为

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0/2|^{-3} = \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{R_0}{R} \cos \theta \right)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} \cos \theta + \dots \right)$$

当 $R_0/R \ll 1$ 时, 上式中 $(R_0/R) \cos \theta$ 的高次幂可以忽略, 对

$$|\mathbf{R} + \mathbf{R}_0/2|^{-3} = \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{R_0}{R} \cos \theta \right)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} \cos \theta + \dots \right)$$

也可以做上述考虑, 所以上述电场强度可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\{ \frac{q\mathbf{R}}{R^3} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} \cos \theta \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{q\mathbf{R}_0}{2R^3} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} \cos \theta \right) + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} \cos \theta \right) \right] \right\} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{3qR_0 \cos \theta}{R^3} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) - \frac{q\mathbf{R}_0}{R^3} \right] \end{aligned}$$

由于电偶极矩 $\mathbf{p}_e = q\mathbf{R}_0$, 所以

$$qR_0 \cos \theta = p_e \cos \theta = p_e \square \mathbf{R} / R$$

这时, 上述电场强度 \mathbf{E} 的表达式可写成

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{3(\mathbf{p}_e \square \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{R^3} \right] \quad (2.46)$$

现在再来看一看, 能否证明如果取 \mathbf{r}_p 为从场点指向电偶极子的矢量, 则电场强度的表达式为

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{3(\mathbf{p}_e \square \mathbf{r}_p)\mathbf{r}_p}{r_p^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{r_p^3} \right]$$

证明过程与上面的基本相同, 但要注意 \mathbf{r}_p 与 \mathbf{R} 的方向正好相反。

注意: 在上面推导电偶极子所产生的电场强度的过程中, 应用了“叠加原理”, 即若干电荷在某一点处产生的电场强度等于每一个电荷单独在该点处所产生电场强度的矢量和。

2.5 磁偶极子

在定义磁偶极子之前, 首先来分析一个闭合电流回路在空间所产生的磁场。正如电偶极子是常见的电场源的存在形式一样, 闭合电流回路是磁场源的最常见形式。如图2.6所示, 在电流回路 l' 所产生的磁场中, 任取一闭合回路 l 。设 P 是 l 回路上的一点, 由式(2.21)可知, 电流回路 l' 在 P 点处产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (2.47)$$

计算 \mathbf{B} 在回路 l 上的闭合线积分, 有

$$\oint_l \mathbf{B} \square d\mathbf{l} = \oint_l \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \right] \square d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \left[\oint_l \frac{-\mathbf{R}}{R^3} \square (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \right] \quad (2.48)$$

上式的推导中运用了矢量混合积恒等式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ 。

电流回路 I' 所包围的面积 S 对 P 点构成一个立体角 Ω ，当 P 点沿回路 I 位移 $d\mathbf{l}$ 时，立体角将增加 $d\Omega$ 。这个 $d\Omega$ 与假设 P 点固定不动而让回路 I' 平移 $-d\mathbf{l}$ 所引起的立体角改变量是相同的，如图 2.7 所示。图中立体角 $d\Omega$ 对应的面积为 I' 位移所形成的环带面积，取此环带上的矢量面元 $d\mathbf{S}' = -d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$ ， $d\mathbf{S}'$ 对 P 点所张的立体角为

$$\frac{-\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}'}{R^3} = \frac{-\mathbf{R} \cdot (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}')}{R^3}$$

其中 \mathbf{R} 前的负号是由于立体角定义中的位置矢量应从顶点 P 指向面元，而此处的 \mathbf{R} 是从面元 $d\mathbf{S}'$ 指向顶点 P 。

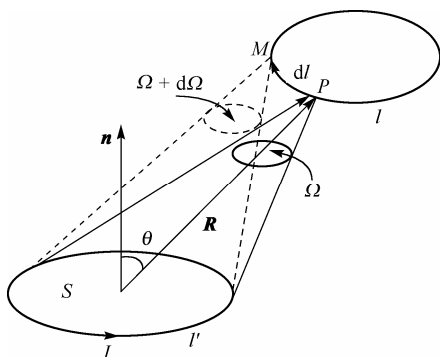


图 2.6 电流回路的立体角与增量

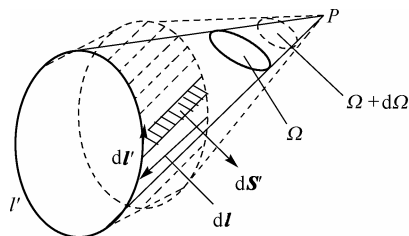


图 2.7 电流回路平移的立体角与增量

环带所张立体角 $d\Omega$ 为 $d\mathbf{S}'$ 所张立体角的积分，即

$$d\Omega = \oint_{I'} \frac{-\mathbf{R}}{R^3} \cdot (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \quad (2.49)$$

式(2.49)的右边恰好就是式(2.48)的括号部分，故式(2.48)可写成

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\Omega$$

$$\text{即有} \quad \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega \quad (2.50)$$

利用以上结论，就可以来计算闭合电流回路在空间 P 点所产生的标量磁位 ϕ_m 。根据式(2.39)的定义可知， ϕ_m 是 \mathbf{H} 的势函数。根据势函数与有势场的对应关系，可得到空间一点 P 处的标量磁位与磁场强度的关系为

$$\phi_{mP} = \int_{P_0}^P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.51)$$

式中， P_0 是标量磁位的参考点。当场源电流分布在有限区域内时，一般将参考点选在无穷远处，此时 P 点的标量磁位为

$$\phi_{mP} = \int_P^\infty \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.52)$$

由式(2.50)可得

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} d\Omega \quad (2.53)$$

将其代入式(2.52)，可得空间任意点 P 的标量磁位为

$$\phi_{mP} = \int_P^\infty \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \int_P^\infty d\Omega = \frac{I}{4\pi} (0 - \Omega) = -\frac{I}{4\pi} \Omega \quad (2.54)$$

式中， Ω 是点 P 对电流回路 I' 所张的立体角。

一般情况下，求任意点 P 对回路面积的立体角并不很容易，但是当 P 点与回路 I' 的距离比电流回路的尺寸大得多时，立体角可以近似地表示为

$$\Omega = -\frac{S \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \quad (2.55)$$

式中的几个变量如图2.6所示， R 是自回路中心到 P 点的相对位置矢量， S 是电流回路所围的面积， \mathbf{n} 是 S 的法向矢量，它与 I' 的方向成右手定则。

将式(2.55)所描述的 Ω 的近似值代入式(2.54)，即可得到电流回路 I' 在远区 P 点处产生的标量磁位：

$$\phi_{mP} = \frac{IS \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{IS \cos \theta}{4\pi R^2} \quad (2.56)$$

式中， θ 是 \mathbf{n} 与 \mathbf{R} 的夹角。

为了便于描述磁偶极子，我们定义一个磁偶极矩矢量 \mathbf{p}_m ，该矢量的大小为 $p_m = IS$ ，而其方向则由 \mathbf{n} 确定，即

$$\mathbf{p}_m = IS \mathbf{n} \quad (2.57)$$

\mathbf{p}_m 的单位是安培·米² (A·m²)。

将磁偶极矩代入式(2.56)，可得

$$\phi_{mP} = \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (2.58)$$

将式(2.58)所得到的磁位函数表达式与式(2.45)所示的电位函数表达式比较，可知二者具有完全类似的形式。

将式(2.58)代入式(2.39)，得

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\mathbf{p}_m \cdot \nabla \frac{1}{R} \right) \quad (2.59)$$

整理后得

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{R^5} \mathbf{R} - \frac{\mathbf{p}_m}{R^3} \right) \quad (2.60)$$

将式(2.60)所得到的磁场函数表达式与式(2.46)所示的电场函数表达式比较，可知二者具有完全类似的形式。

正因为上述的 ϕ_m 和 \mathbf{B} 的表达式与电偶极子的 ϕ 和 \mathbf{E} 的表达式完全类似，所以将这种尺寸远远小于回路与场点之间距离的小电流回路(或者称为电流环)称为磁偶极子。

从上面磁偶极子的定义可看出，磁偶极子是根据电磁对偶性派生出来的一种概念。磁偶极子与电偶极子不同，它不能在物理上实现，在工程上它是一个载有交变电流的小圆环的等效模型。

2.6 由电通量与高斯定律导出麦克斯韦第一方程

2.6.1 电通量

凡是矢量场,均有通量可言。把一个测试电荷放入电场中,作用在此电荷上的力将使它按照一定的路线移动,这个路线称为电力线或通量线。若电荷移动到一个新的位置,则又能描出另一条电力线,如此重复就可以得到任意多条电力线。电力线的数目就称为电通量,通常人为地规定一个电荷 q 所产生的电力线条数即电通量等于用库仑表示的电荷的大小。那么,一个电量为 q 的电荷能发出多少电力线呢?即它的电通量是多少呢?

设在自由空间中有一个点电荷 q ,以它为球心作一半径为 R 的球面,如果用符号 \mathbf{D} 表示球面上的电通量密度,即

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \quad (2.61)$$

于是,根据上面所述的规定,通过整个球面的电通量为

$$\Phi_e = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (2.62)$$

比较式(2.61)与式(2.2),可得电通量密度与电场强度的关系为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.63)$$

式中, \mathbf{D} 的单位为库仑每平方米(C/m^2)。

若考虑 S 为一个闭合曲面,其中所包围的电荷多于一个以上,则电通量关系应改写为

$$\Phi_e = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q \quad (2.64)$$

由式(2.62)和式(2.63)还可知,电场强度 \mathbf{E} 穿出球面的电场强度通量为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (2.65)$$

2.6.2 麦克斯韦第一方程

令

$$Q = \sum q$$

则由式(2.64)得

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

根据高斯定律,有

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = Q$$

假设闭合面 S 所包围的体积 V 中的电荷分布密度为 ρ , 即

$$Q = \sum q = \int_V \rho dV$$

则

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV$$

$$\text{即有} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.66)$$

$$\text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (2.67)$$

将式(2.66)或式(2.67)称为麦克斯韦第一方程。从上述过程可知,麦克斯韦第一方程是以电荷 q 为场源,利用电通量的表达式和高斯定律推导而得到的。

2.7 由电磁感应定律与斯托克斯定律导出麦克斯韦第二方程

法拉第是19世纪电磁学领域中最伟大的实验物理学家。法拉第电磁感应定律的数学定义式为

$$e = -d\Phi_m / dt \quad (2.68)$$

式(2.68)说明,沿闭合路径的感应电动势(Electromotive force, 简称 emf) e 等于闭合路径所包围面积内穿过的磁通 Φ_m 的变化率。严格说来,此方程是建立在实验观察基础上的,并且,负号由楞次所引入,目的是为了遵守感应电动势的极性,现称之为楞次定律。楞次定律表明,穿过环路的磁通变化在闭合导电环内感应的电流方向是使感应电流产生的磁通趋向于抵消原来磁通的变化。实验结果与楞次定律是吻合的。

另一方面,我们已经知道,要在导体内维持电流必须使此导体内存在电场。基于这种理解,可以用导体内的感应电场强度 \mathbf{E} 来定义感应电动势,即

$$e = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.69)$$

式中, l 是假想的导体闭合路径。

类似于2.6节的推导,若以闭合路径 l 为边界的面积上的磁通密度用符号 \mathbf{B} 表示,则穿过该面积的磁通量为

$$\Phi_m = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.70)$$

根据式(2.68)和式(2.69)可得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.71)$$

若考虑 S 面在空间是固定的,并且 l 所包围的是同一面积 S ,则式(2.71)右边的时间导数将只作用于时变场 \mathbf{B} ,同时再对等号左边运用斯托克斯定律,得

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.72)$$

于是就得到麦克斯韦第二方程:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (2.73)$$

2.8 由磁通量与高斯定律导出麦克斯韦第三方程

已知穿过开表面积 S 的磁通为

$$\Phi_m = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.74)$$

目前的实验表明,磁体的南、北极不能分开,由北极出发的磁通线数正好等于进入南极的磁通线数,换言之,磁通线始终是连续的。于是,对于一个闭合曲面 S 而言,有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.75)$$

这一特性被称之为磁通连续性原理。

根据高斯定律,有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (2.76)$$

于是得麦克斯韦第三方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.77)$$

2.9 由安培环路定律与斯托克斯定律导出麦克斯韦第四方程

2.9.1 传导电流、运流电流和位移电流

我们通常所认识的电流是自由电荷在导电媒质(有阻力的区域)中作有规则运动所形成的传导电流,或者是自由电荷在无阻力空间作有规则运动时形成的运流电流。

电流存在的明显标志是它所产生的磁效应。在时变电磁场中,不仅导电媒质中的运动电荷周围具有磁效应,无阻力空间的运动电荷周围具有磁效应,而且变动电场周围空间也具有磁效应。因此对于一般意义上的电流概念,就必须加以补充和拓广。

1. 传导电流

传导电流是人们最为熟悉的一种电流,它是自由电荷在导电媒质中作有规则运动而形成的,产生这种电流的根本原因是导电媒质中存在电场的作用。当电荷在导电媒质中运动时,将会遇到与其他质点发生碰撞而产生的阻滞作用。因此,传导电流应服从于欧姆定律。

如图2.8所示,在导体中沿电流方向取一极小圆柱体 AB , 设其长度为 dl , 截面积为 dS , A 、 B 两端的电势分别为 φ 和 $\varphi + d\varphi$ 。根据欧姆定律,由 A 向 B 通过截面积 dS 的电流为

$$dI = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} = -\frac{d\varphi}{R}$$

再将导体电阻与导体参数的关系式 $R = \eta dl/dS$ 代入上式,得

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{1}{\eta} \frac{d\varphi}{dl}$$

式中, η 为电阻率。因为 $dI/dS = J_c$ (J_c 为电流密度), 又根据电场强度与电势的关系 $-d\varphi/dl = E$, 上式可写成

$$J_c = E/\eta = \gamma E$$

式中, γ 称为电导率。由于电流密度和场强都是矢量, 并且它们的方向相同, 故有

$$\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E} \quad (2.78)$$

此式称为微分形式的欧姆定律, 它表明了传导电流密度与电场强度的关系。由上述关系可知, 传导电流为

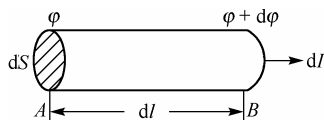


图 2.8 传导电流与电场的关系

$$i_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} \quad (2.79)$$

2. 运流电流

电荷在无阻力空间, 由于电场力作用或由于机械原因而产生规则运动时, 将形成运流电流。例如, 在电子管中就存在这种运流电流。形成运流电流的电荷在运动时并不受到碰撞阻滞作用, 即使存在与其他粒子发生碰撞的机率, 其作用也微乎其微, 可忽略不计, 因此运流电流不服从于欧姆定律。

假设存在一个电荷体密度为 ρ 的区域, 在电场作用下, 电荷以平均速度 v 运动, 在 dt 时间内, 电荷运动的距离为 dl , 即

$$dl = v dt$$

dl 的方向与平均速度 v 的方向相同。如果存在一个面积元 dS , 当运动电荷垂直穿过面积元时, dt 时间内穿过的总电量为

$$dq = \rho dS dl = \rho v dS dt$$

则穿过的电流为

$$di_v = dq/dt = \rho v dS$$

所以, 运流电流为

$$i_v = \int di_v = \int_S \rho v \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}_v \cdot d\mathbf{S} \quad (2.80)$$

即, 在面积元 dS 上任意一点的运流电流密度为

$$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v} \quad (2.81)$$

由于传导电流与运流电流都是由带电质点的运动所形成的, 因而在空间同一点上, 两种电流密度一般不能同时并存。

3. 位移电流

在时变电磁场中, 电场总是处于一种变动状态, 电介质内部的电量将会随着电场的不断变化而产生一种持续的微观迁移, 从而形成一种电流, 这种电流不像传导电流和运流电流那样是由电荷宏观运动所产生的, 它只是分子束缚电荷微观位移的结果, 因而称之为位移电流。

假定作一个闭合面 S , 其中所包围的电量为 q , 已知

$$q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

则穿过闭合面 S 的位移电流 i_d 为

$$i_d = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} \quad (2.82)$$

因此, 位移电流密度为

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.83)$$

2.9.2 电流连续性原理

在时变电磁场空间, 围绕着通电导体作一闭合面 S 。假设穿入闭合面的导体上的传导电流为 i_c , 同时有运流电流 i_v 也穿入 S 面, 则穿入的传导电流和运流电流应等于 S 面内自由电量 q 的增加率, 即

$$i_c + i_v = dq/dt \quad (2.84)$$

若指定穿出 S 面的电流为正, 则式(2.84)可写成

$$-\left(\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{J}_v \cdot d\mathbf{S}\right) = dq/dt \quad (2.85)$$

假设 S 面内自由电量 q 的增长应与穿出的位移电流相一致, 即

$$i_d = \frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} \quad (2.86)$$

由式(2.85)和式(2.86)可得

$$\oint_S (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.87)$$

式(2.87)所描述的电流关系称为电流连续性原理。

式(2.87)也可写成

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.88)$$

式中, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d = \gamma \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, 称为全电流密度。此全电流密度穿过 S 面的通量

$$i = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.89)$$

称为穿过 S 面的全电流。

电流连续性原理表明: 在时变场中, 在传导电流中断处必有运流电流或位移电流接续。

我们曾经说过, 传导电流 \mathbf{J}_c 和运流电流 \mathbf{J}_v 一般不会同时存在, 因此对于传导电流, 由电流连续性原理可得

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = -dq/dt$$

在等式右边设电荷 $q = \int_V \rho dV$ (ρ 为电荷体密度), 则有

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.90)$$

通常将式(2.90)称为积分形式的电流连续性方程。

若在式(2.90)左边运用高斯定律, 则有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t \quad (2.91)$$

通常将式(2.91)称为微分形式的电流连续性方程。

2.9.3 麦克斯韦第四方程

在前面的分析中已经定义, 穿过面积 S 的电通量为

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

穿过面积 S 的磁通量为

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

式中, \mathbf{D} 称为电通量密度; \mathbf{B} 称为磁通量密度。前面曾经定义用电场强度 \mathbf{E} 表示的电通量密度为 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, 根据对偶性原理, 在自由空间用磁场强度 \mathbf{H} 表示的磁通密度就可相应地描述为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.92)$$

安培环路定律是表征恒定磁场的基本方程之一, 其积分形式为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (2.93)$$

或

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (2.94)$$

式中, I 为传导电流。只要传导电流连续, 则安培环路定律必定成立。但在时变场中, 传导电流却不一定处处连续。例如, 在有电容器所构成的回路中, 电容器极板之间的传导电流就不连续。因此, 在时变场中, 应将安培环路定律中的电流拓广为全电流, 即有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.95)$$

由斯托克斯定律, 得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S}$$

所以有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d \quad (2.96)$$

考虑传导电流与运流电流一般不同时并存的情况, 可将这两种电流统称为 \mathbf{J} , 于是式 (2.96) 可记为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.97)$$

这就是麦克斯韦第四方程。

因为 $1/\varepsilon_0 \mu_0 = c^2$ (c 为光速), 所以式 (2.97) 可写成

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.98)$$

即

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.99)$$

这是麦克斯韦第四方程的另一种表达形式。麦克斯韦第四方程表明, 电流或变化的电场将产生磁场。

2.10 微分形式的麦克斯韦方程组

将上面推导出的麦克斯韦方程联立在一起,就得到了微分形式的麦克斯韦方程组,即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (2.100)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (2.101)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.102)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.103)$$

或写成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

式(2.100)~式(2.103)中,电场强度 \mathbf{E} 与磁感应强度 \mathbf{B} 的意义已由洛伦兹力的表达式所确定。常数 ε_0 也已给定,而常量 c 则是真空中的光速,其大小约为 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

式(2.100)建立了电场强度 \mathbf{E} 与电荷密度 $\rho \text{ (C/m}^3\text{)}$ 之间的关系,有了电荷密度函数 ρ ,就很容易描述电荷在空间的分布情况。而在式(2.103)中则建立了磁感应强度 \mathbf{B} 与电流密度矢量 $\mathbf{J} \text{ (A/m}^2\text{)}$ 的关系。一般来说, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 ρ 和 \mathbf{J} 这四个变量均是时间和空间的函数。因此,当一个电荷经过空间任一点时,就可以确定该点处电场和磁场的变化情况。而对于所要讨论的空间中的任一点,可以用一个从参考点(初始点)指向该点(场点)的矢量 \mathbf{r} 来表示,时间则用时间坐标 t 来描述。这样,就能够用坐标 (\mathbf{r}, t) 来确定场中的任意一点,从而也就可以确定整个场中 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 ρ 及 \mathbf{J} 的变化情况。如果想要强调这一点,则可以将麦克斯韦方程组中的变量写成空间和时间的函数形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) / \varepsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / \partial t$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

虽然这与麦克斯韦所写的方程式在形式上有所不同,但仍然可以认为麦克斯韦在将实验结果总结成方程式时就是如此考虑的。

下面对这些方程式进行初步的讨论,看一看它们分别依据的是何种实验结果。

第一方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

将电场与其场源——电荷密度联系了起来,实际上,它是库仑定律的另一种表达形式,这一点可从下面的例 2.2 中得到证明。

第二方程:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

表明了随时间变化的磁场会产生电场。我们知道,将圆环导线放置在一个建立好的磁场附近,

然后迅速将磁场减为零,这时将产生电场,该电场会使得导线中的电子发生移动,从而在圆环导线中产生感应电流。因此,这个方程式是法拉第电磁感应定律的微分形式。

$$\text{第三方程:} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

它与第一方程形成了十分有趣的对比。 \mathbf{B} 的散度与 \mathbf{E} 的散度结果完全不同,这表明 \mathbf{E} 的源和 \mathbf{B} 的源各异。 \mathbf{E} 的源是点电荷,而 \mathbf{B} 的源却不然。也就是说,在形成磁场的源中,不存在“点磁荷”或“自由磁极”。尽管研究(已经进行了很多年)仍然在进行,但至今自由磁极还是没有被找到。

$$\text{第四方程:} \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

再次强调了电场和磁场之间的内在联系,同时也指出了产生磁场的源是电流(或移动电荷)。这个方程是描述由电流产生磁场的安培定律的另一种表现形式。当然,从这个方程也不难发现,随时间变化的电场也会产生磁场。

例 2.2 利用高斯定律,由麦克斯韦方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ 导出描述两个点电荷之间受力关系的库仑定律。

解: 首先来寻找一个点电荷所形成的电场,该点电荷可以被视为是电荷分布的一种极限情况(当其体积趋近于零时)。如图 2.9 所示,设点电荷 q' 位于原点,且假想它被一个半径为 R 的球面所包围。

于是,电荷 q' 可以表示成在球体上对电荷密度 ρ 的体积分:

$$q' = \int_V \rho dV$$

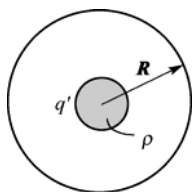


图 2.9 点电荷形成的电场

由麦克斯韦第一方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

则有

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \rho/\epsilon_0 dV = q'/\epsilon_0$$

利用高斯定律将上式左边的体积分变换成为相应的面积分,则有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q'/\epsilon_0$$

考虑到上述问题的对称性(对位于球面内中心的电荷来说,球面上的各点均具有对称性),可知球面上所有点的 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ 的值必定相等,于是有

$$q'/\epsilon_0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \oint_S dS = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} (4\pi R^2)$$

式中, dS 的积分就是球的表面积。

因此有

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{q'}{R^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

或写成

$$\mathbf{E} = \frac{q'}{R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

式中, \mathbf{R}/R 是一个与 \mathbf{n} 同向的单位矢量,即 $\mathbf{R}/R = \mathbf{n}$ 。

在电荷 q' 附近的电荷 q 所受到的作用力为

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = \frac{qq'}{R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

这就是库仑定律。

例 2.3 试证明若不计边缘效应, 则一平行板电容器两极板间的静电场强度 \mathbf{E} 的表达式为

$$\mathbf{E} = \sigma / \epsilon_0$$

式中, σ 为正极板上单位面积的电荷量。

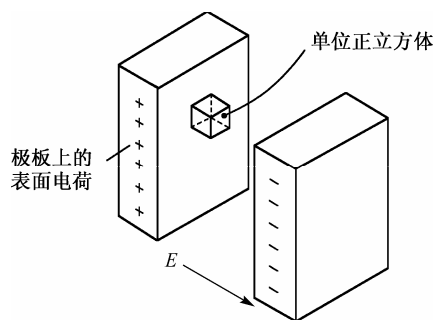


图 2.10 平行板电容器两极板间的静电场

证明: 显然, 两极板间的电场强度矢量处处垂直于极板, 且电场强度方向由正极板垂直指向负极板。因为如果存在平行于金属极板的电场强度矢量, 则将会导致金属极板中的电荷流动, 直至其值变为零。如图 2.10 所示, 现在设想有一个单位正立方体, 它其中的一个面是正极板表面上的一个单位面积, 另有一个面平行于极板表面。这样, 这个问题就变成与例 2.2 中所讨论的问题非常相似了。

单位体积内的电荷 Q 为

$$Q = \int_V \rho dV = \sigma \text{ (数值)}$$

由于包含在单位体积 V 内的总电荷是在电容正极板的一个单位面积上的, 由麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

可得

$$\sigma / \epsilon_0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

由高斯定律又可得

$$\sigma / \epsilon_0 = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

由于只有在单位体积的某个面上的 \mathbf{E} 和 \mathbf{n} 是同向的时候, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ 项才不为零, 因此有

$$\sigma / \epsilon_0 = E$$

2.11 麦克斯韦方程的积分形式

将上述几节中所推导的公式进行汇总, 根据高斯定律和斯托克斯定律, 即可得到与微分形式相对应的麦克斯韦方程组的积分形式:

	微分形式	积分形式	
第一方程	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$	(2.104)

第二方程	$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$	(2.105)
------	--	---	---------

第三方程	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$	(2.106)
------	-------------------------------	--	---------

$$\text{第四方程} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.107)$$

以及所谓的媒质特性方程:

$$\text{磁通密度与磁场强度} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.108)$$

$$\text{电通密度与电场强度} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.109)$$

$$\text{电流密度与电场强度} \quad \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E} \quad (2.110)$$

以上即为麦克斯韦所总结的微分形式(包括三个媒质特性方程)与积分形式(包括三个媒质特性方程)的电磁场方程组,又称为电磁场的完整方程组。之所以称其“完整”,是因为方程组全面地描述了作为统一的电磁场的两个方面——电场与磁场的相互关系,以及电场、磁场本身所具有的规律和电场、磁场与其所处空间的媒质的关系。具体地说,第一方程表明电场是有散度场,即电场可以由点源电荷所激发;第三方程表明磁场为无散度场,即磁场不可能由单极磁荷所激发;而第二方程和第四方程则描述了电场与磁场相互依存、相互制约并且相互转化的关系。

麦克斯韦方程组是求解时变电磁场的基本理论依据,如果将场量视为不随时间变动的恒定量,则可从上述方程得到描述静电场、恒定电场和恒定磁场的微分或积分形式的麦克斯韦方程组,它们只不过是麦克斯韦方程组在特殊情况下的特殊形式。无论在何种情况下,求解电磁场问题将主要是求解麦克斯韦方程组的问题。

例 2.4 试证明:由麦克斯韦方程组中的两个旋度方程及电流连续性方程,可导出麦克斯韦方程组中的两个散度方程。

证明: 对旋度方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 两边取散度,得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}$$

由电流连续性方程

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -dq/dt$$

在等式左边运用高斯定律,在等式右边设电荷 $q = \int_v \rho dV$ (ρ 为电荷体密度),则有

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dV = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

根据矢量关系 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0$$

故可得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

同理,对旋度方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 两边取散度,得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}$$

根据矢量关系 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$, 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

证毕。

2.12 麦克斯韦方程的时谐形式

时变电磁场的一种最重要的类型是时间简谐场, 简称时谐场。所谓时谐场, 即激励源按照单一频率随时间作正弦变化时所激发的也随时间按照正弦变化的场。在线性系统中, 一个正弦变化的源在系统中所有的点都将产生随时间按照同样规律(正弦)变化的场。对于时谐场, 我们可以用相量分析获得单频率(单色)的稳态响应。以这种方式研究场时, 将不失一般性, 其原因如下: ①任何时变周期函数都可以用正弦函数表示的傅里叶级数来描述; ②在线性条件下, 可以使用叠加原理。通俗地讲, 时变周期场的完整响应可由单色响应叠加而成。

根据电路理论中的相量法, 我们可以用相量来表示随正弦变化的场量。在笛卡儿坐标系中, 电场强度矢量可用沿三个互为垂直的坐标轴的分量来表示, 即

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_x(x, y, z, t)\mathbf{e}_x + E_y(x, y, z, t)\mathbf{e}_y + E_z(x, y, z, t)\mathbf{e}_z \quad (2.111)$$

其中的三个分量可表示为

$$E_x(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z)\cos(\omega t + \theta_x) \quad (2.112)$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_{ym}(x, y, z)\cos(\omega t + \theta_y) \quad (2.113)$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_{zm}(x, y, z)\cos(\omega t + \theta_z) \quad (2.114)$$

式中, E_{xm} 、 E_{ym} 和 E_{zm} 分别为 \mathbf{E} 矢量在 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z 方向的幅值。还可将三个分量用复数的实部表示为

$$E_x = \operatorname{Re}[E_{xm}e^{i(\omega t + \theta_x)}] = \operatorname{Re}[\dot{E}_{xm}e^{i\omega t}] \quad (2.115)$$

$$E_y = \operatorname{Re}[E_{ym}e^{i(\omega t + \theta_y)}] = \operatorname{Re}[\dot{E}_{ym}e^{i\omega t}] \quad (2.116)$$

$$E_z = \operatorname{Re}[E_{zm}e^{i(\omega t + \theta_z)}] = \operatorname{Re}[\dot{E}_{zm}e^{i\omega t}] \quad (2.117)$$

所以
$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}[(\dot{E}_{xm}\mathbf{e}_x + \dot{E}_{ym}\mathbf{e}_y + \dot{E}_{zm}\mathbf{e}_z)e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}] \quad (2.118)$$

运用上述规则, 可将麦克斯韦方程改写为时谐形式:

微分形式 积分形式

第一方程	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	(2.119)
------	--	--	---------

第二方程	$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -i\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	(2.120)
------	--	---	---------

第三方程	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(2.121)
------	-------------------------------	--	---------

第四方程	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + i\omega \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}$	(2.122)
------	--	---	---------

例 2.5 已知在无源的自由空间中, 电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \text{ (V/m)}$$

利用麦克斯韦方程求相应的磁场 \mathbf{H} 及常数 β 。

解: 将 \mathbf{E} 表示为复数形式

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{e}_y 0.1 \sin(10\pi x) e^{-i\beta z} \quad (2.123)$$

由时谐形式的麦克斯韦第二方程可得

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, z) &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \left[-\mathbf{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \left[-\mathbf{e}_x i0.1\beta \sin(10\pi x) + \mathbf{e}_z i0.1 \times 10\pi \cos(10\pi x) \right] e^{-i\beta z} \end{aligned}$$

又因为无源空间中 $\mathbf{J} = 0$, 所以由时谐形式的麦克斯韦第四方程可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, z) &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \mathbf{e}_y \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \\ &= \mathbf{e}_y \frac{0.1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} \left[(10\pi)^2 + \beta^2 \right] \sin(10\pi x) e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (2.124)$$

比较(2.123)和式(2.124), 有

$$(10\pi)^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = (6\pi \times 10^9)^2 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{36\pi \times 10^9} = 400\pi^2$$

$$\text{可得} \quad \beta = \sqrt{400\pi^2 - 100\pi^2} = 10\sqrt{3}\pi = 54.41 \text{ (rad/m)}$$

所以, 相应的磁场 \mathbf{H} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, z, t) &= -\mathbf{e}_x 0.23 \times 10^{-3} \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - 54.41z) - \\ &\quad \mathbf{e}_z 0.13 \times 10^{-3} \cos(10\pi x) \sin(6\pi \times 10^9 t - 54.41z) \text{ (A/m)} \end{aligned}$$

2.13 电磁场的能量与坡印廷矢量

由麦克斯韦方程组可以导出电磁场能量的守恒方程, 该方程中包含了这样一项, 它可以用电磁场中任何一点处的能量密度变化率来表示。

麦克斯韦方程组如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (2.125)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.126)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.127)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.128)$$

用 \mathbf{E} 对式(2.128)两边同时取点乘, 可得

$$c^2 \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}}{\epsilon_0} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.129)$$

用 \mathbf{B} 对式(2.126)两边同时取点乘, 可得

$$\mathbf{B} \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

再用 c^2 乘以上式, 可得

$$c^2 \mathbf{B} \nabla \times \mathbf{E} = -c^2 \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.130)$$

用式(2.129)减去式(2.130), 有

$$c^2 (\mathbf{E} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{E} \mathbf{J} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2 \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.131)$$

式中, 左边的括号内包含了两个标量三重积, 第一个标量三重积中, 算子 $\nabla \times$ 只作用于 \mathbf{B} , 而在第二个标量三重积中, 算子 $\nabla \times$ 只作用于 \mathbf{E} , 为了清楚起见, 把它们写成

$$c^2 (\mathbf{E} \nabla_B \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla_E \times \mathbf{E})$$

根据矢量分析理论, 对于任意三个矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} , 其标量三重积可以交换乘积顺序, 如

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

利用这个结论, 可将式(2.131)写成

$$\begin{aligned} c^2 (\mathbf{E} \nabla_B \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla_E \times \mathbf{E}) &= c^2 (\nabla_B \mathbf{B} \times \mathbf{E} - \nabla_E \mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= c^2 (-\nabla_B \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \nabla_E \mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -c^2 [(\nabla_B + \nabla_E) \mathbf{E} \times \mathbf{B}] \\ &= -c^2 \nabla \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

于是式(2.131)可以写成

$$\varepsilon_0 c^2 \nabla \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{或} \quad \nabla \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \mathbf{J} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.132)$$

式(2.132)实际上是能量守恒定律的描述, 为了纪念坡印廷对发展此理论所做出的贡献, 人们将式(2.132)命名为坡印廷定理的微分形式, 而将其中的 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 这一项称为坡印廷矢量, 常用符号 \mathbf{S} 表示, 即

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.133)$$

在自由空间中, 由于

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 E^2) \\ \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 H^2) \end{aligned}$$

所以, 式(2.132)又可写成

$$\nabla \mathbf{S} + \mathbf{E} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) = 0 \quad (2.134)$$

下面我们来讨论式(2.134)式中各项的含义。

首先考虑 $\mathbf{E} \mathbf{J}$ 这一项, 假设电流密度 \mathbf{J} 与电场强度 \mathbf{E} 具有相同的方向, 并且电流密度 \mathbf{J} 由 N 个电荷组成, 每个电荷的大小均为 q , 单位体积的电荷以均匀速率 \mathbf{dx}/\mathbf{dt} 移动, 于是

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= ENq \frac{dx}{dt} = \frac{1}{dt} (ENq dx) = \frac{1}{dt} (NF_E dx) \\
 &= \frac{1}{dt} \{N \times \text{单位电荷受力} \times \text{距离微元}\} \\
 &= \frac{1}{dt} \{\text{功微元}\}
 \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = dU/dt \quad (2.135)$$

因此, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ 可以看成是某一点上的单位体积能量(能量密度)的变化率。如果要使式(2.134)的纲量和谐的话, 该式中所有的项都必须具有相同的意义, 即它们均为场中某一点上的单位体积能量的变化率。式(2.134)中的第三项表示在电场中电场能量密度的变化率, 第四项表示在磁场中磁场能量密度的变化率。因而在电场和磁场中能量密度瞬时表达式分别为

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.136)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (2.137)$$

为了更好地理解式(2.134)中各项的真实含义, 将它写成如下积分形式:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} U_e dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} U_m dV = 0 \quad (2.138)$$

或

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V U_e dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V U_m dV = 0 \quad (2.139)$$

式(2.139)称为坡印廷定理的积分形式。式中第一项表示穿过包围体积 V 的封闭面 S 的功率。如果积分为正, 则表示功率流出体积 V ; 如果积分为负, 则表示功率流入体积 V 。第二项表示由场供给带电粒子的功率。当积分为正时, 场对带电粒子做功, 当积分为负时, 则外力做功, 以使带电粒子反抗场而运动。在导电媒质中 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, 所以此项表示功率损耗或欧姆功率损耗。第三项表示电场储能的变化率, 当积分为正时, 有外源给电场以能量, 使电场增强。当积分为负时, 电能由电场释出, 使场减弱。第四项表示磁场储能的变化率, 当积分为正时, 有外源给磁场以能量, 使磁场增强。当积分为负时, 磁能由磁场释出, 使场减弱。

通常将式(2.139)写成

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V (U_e + U_m) dV \quad (2.140)$$

式(2.140)左边的负号表示净功率流入体积 V , 以提供体积内的热损耗和电场与磁场的储能增加。

对于静态场, 式(2.140)变成

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (2.141)$$

它表明, 经过面 S 流入体积 V 的净功率等于体积内的功率损耗。

为了更好地理解坡印廷矢量 \mathbf{S} , 在式(2.134)中取电流密度 $\mathbf{J} = 0$ 的情况进行分析, 比如说在无源的自由空间中, 这时

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (2.142)$$

我们知道式中每一项都是场中任一点的单位体积能量的变化率,因而就可以得出任意一个体积 V 中的能量变化率为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV \quad (2.143)$$

对式(2.143)左边运用高斯定律,可得到

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV \quad (2.144)$$

式中, \mathbf{S} 是一个包围体积 V 的封闭曲面,严格说来,对于坡印廷矢量 \mathbf{S} 的阐述是与方程(2.144)这种类型的面积分有关的,从式(2.144)可以知道,坡印廷矢量 \mathbf{S} 具有功率密度的单位,即为瓦每平方米 (W/m^2), \mathbf{S} 必定是闭合面 S 表面上任一点处单位面积的瞬时功率流。根据矢量分析中的矢量积或通常所称的叉乘的规则可知,功率流的方向与包含 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的平面相垂直。

对于正弦电磁场,计算一个周期内的时间平均值更有实际意义。 \mathbf{S} 的时间平均值即平均坡印廷矢量定义为

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \int_0^T (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt \quad (2.145)$$

当电场和磁场用复数形式表示时,有

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}] \times \text{Re}[\dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}] dt \quad (2.146)$$

经过积分后得

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] \quad (2.147)$$

于是,可以定义在时谐形式下的复坡印廷矢量为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \quad (2.148)$$

可以看出, $\tilde{\mathbf{S}}$ 与 \mathbf{S}_{av} 相互联系,而与瞬时坡印廷矢量 \mathbf{S} 之间却没有关系。也就是说,不能由 $\tilde{\mathbf{S}}$ 的表达式取实部得到 \mathbf{S} 的表达式。定义复坡印廷矢量 $\tilde{\mathbf{S}}$ 的目的是为了能够方便地计算出 \mathbf{S}_{av} 。

例 2.6 已知电磁场的复数形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\mathbf{e}_y i\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z} \\ \mathbf{H} &= \left[\mathbf{e}_x i\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \mathbf{e}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] e^{-i\beta z} \end{aligned}$$

式中, H_0 、 ω 、 μ 、 β 和 a 都是常数。试求: (1) 瞬时坡印廷矢量; (2) 平均坡印廷矢量。

解: (1) \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的瞬时值为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, z, t) &= \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}] = \mathbf{e}_y \omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{H}(x, z, t) &= \text{Re}[\dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}] \\ &= -\mathbf{e}_x \beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{e}_z H_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

所以, 瞬时坡印廷矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, z, t) &= \mathbf{E}(x, z, t) \times \mathbf{H}(x, z, t) \\ &= \mathbf{e}_x \frac{a}{4\pi} \omega \mu H_0^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin(2\omega t - 2\beta z) + \mathbf{e}_z \omega \mu \beta \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 H_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

(2) 平均坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \omega \mu \beta \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 H_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

本章小结

1. 电磁场中的三种力

$$\text{电场力: } \mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = \frac{qq'}{R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

$$\text{磁场力: } \mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\text{洛伦兹力(电场力与磁场力的合力): } \mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

2. 电通量 Φ_e 定义为: $\Phi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 其中, 电通密度 \mathbf{D} 与电场强度 \mathbf{E} 的关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

3. 电磁场中的三种电流

(1) 传导电流 $i_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S}$, 其中, 传导电流密度 $\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$, 这表明传导电流的电流密度 \mathbf{J}_c 与电场强度 \mathbf{E} 服从于欧姆定律。

(2) 运流电流 $i_v = \int_S \mathbf{J}_v \cdot d\mathbf{S}$, 其中, 运流电流密度 $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$, 运流电流不服从于欧姆定律, 并且传导电流与运流电流一般不能同时并存。

(3) 位移电流 $i_d = \iint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$, 它是分子束缚电荷微观位移所产生的。其中, 位移电流密度 $\mathbf{J}_d = \partial \mathbf{D} / \partial t = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ 。

4. 电流连续性原理表示为 $\iint_S (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 或 $\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 式中 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d = \gamma \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ 称为全电流密度。此全电流密度穿过 S 面的通量 $i = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ 称为穿过 S 面的全电流。电流连续性原理表明, 时变场中在传导电流中断处必有运流电流或位移电流接续。

5. 电偶极子是由两个相距很近、距离为 d 的等值异号电荷 $+q$ 和 $-q$ 构成的, 电偶极矩 $p_e = qd$ 。

6. 对于一个小电流环, 如果所讨论的场对电流环而言是远区场, 则这个电流环称为磁偶极子。磁偶极矩 $p_m = ISn$ 。

7. 微分形式的麦克斯韦方程组

$$\text{第一方程} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{第二方程} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\text{第三方程} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{第四方程} \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

8. 积分形式的麦克斯韦方程组

$$\text{第一方程} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\text{第二方程} \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{第三方程} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{第四方程} \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

9. 时谐形式的麦克斯韦方程组

微分形式

积分形式

$$\text{第一方程} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\text{第二方程} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -i\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{第三方程} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{第四方程} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + i\omega \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}$$

10. 媒质的三个特性方程

$$\text{磁通密度与磁场强度} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\text{电通密度与电场强度} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\text{电流密度与电场强度} \quad \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$$

11. 坡印廷定理表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

其中, $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 这一项称为坡印廷矢量, 它表示电磁能量在空间的能流密度。

$$12. \text{平均坡印廷矢量} \mathbf{S}_{av} = \int_0^T (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt, \text{当电场和磁场用复数形式表示时, } \mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*],$$

$$\text{时谐形式的复坡印廷矢量} \tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*.$$

习 题 2

2.1 假设氯化氢 (H^+Cl^-) 分子中的氢离子被完全电离, 且氢原子与氯原子之间的距离约为 $1.3 \times 10^{-10} \text{m}$, 试估计 H^+Cl^- 的电偶极矩。

注意: 在前面的分析中由于简化了电荷的分布, 所以求出的结果可能会高于实验结果。

2.2 根据习题 2.1 中的结论, 计算距离 H^+Cl^- 分子 $100 \times 10^{-10} \text{m}$ 处的电场最大值, 并计算距离自由电子 $100 \times 10^{-10} \text{m}$ 处的电场。

2.3 试证明, 在电场强度 \mathbf{E} 中旋转一个偶极矩为 \mathbf{p}_e 的电偶极子所需的能量为 $-\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}$, 其中取偶极子与电场呈直角时的相应能量为零。

2.4 根据习题2.2中的结论,估算两个相距 $100 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的 H^+ 、 Cl^- 粒子相互作用时的最大能量为多少。

2.5 证明:通过任意闭合面的传导电流与位移电流之和等于零。

2.6 证明:(1)在无源的自由空间中仅随时间变化的场,如 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin \omega t$,不可能满足麦克斯韦方程组;(2)若将 t 换成 $(t - z/c)$,即 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin \omega(t - z/c)$,则可以满足麦克斯韦方程组,式中 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。

2.7 有一种典型的金属导体,电导率 $\gamma = 5 \times 10^7 \text{ s/m}$,介电常数为 ϵ_0 ,若导体中的传导电流密度为 $\mathbf{J} = \mathbf{e}_x 10^6 \sin[117.1 \times (3.22t - z)] \text{ A/m}^2$,求位移电流密度 \mathbf{J}_d 。

2.8 已知自由空间的磁感应强度为 $\mathbf{B} = 33 \times 10^{-12} \cos(3 \times 10^9 t - 10z) \mathbf{e}_y$,求位移电流密度 \mathbf{J}_d ;若 $t = 0$, $z = 1.1 \text{ m}$ 时, $\mathbf{E} = 0$,求 $t = 1 \text{ ms}$ 时, $z = 9 \text{ km}$ 处的电场强度 \mathbf{E} 。

2.9 举例说明 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 的含义。

2.10 说明 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ 的含义,并写出它在直流电路中的形式。

2.11 已知在无源的自由空间中,磁场为 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y 2 \cos(15\pi x) \sin(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \text{ A/m}$,利用麦克斯韦方程求相应的电场 \mathbf{E} 及常数 β 。

2.12 同轴电缆的内导体半径 $a = 1 \text{ mm}$,外导体内半径 $b = 4 \text{ mm}$,内外导体间为空气介质,并且电场强度为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{100}{r} \cos(10^8 t - 0.5z) \text{ V/m}$,试求:(1)求磁场强度 \mathbf{H} 的表达式;(2)求内导体表面的电流密度;(3)计算 $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ 中的位移电流 i_d 。

2.13 在两导体平板($z = 0$ 和 $z = d$)之间的空气中,已知电场强度为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \sin(\pi z/d) \cos(\omega t - k_x x) \text{ V/m}$,式中 E_0 、 k_x 为常数。试求:(1)磁场强度 \mathbf{H} ;(2)两导体表面上的电流密度 \mathbf{J}_s 。

2.14 已知正弦电磁场的瞬时值为 $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_1(z, t) + \mathbf{E}_2(z, t)$,式中 $\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{e}_x 0.03 \sin(10^8 \pi t - kz) \text{ V/m}$;
 $\mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{e}_x 0.04 \cos\left(10^8 \pi t - kz - \frac{\pi}{3}\right) \text{ V/m}$ 。试求:(1)电场的复矢量;(2)磁场的复矢量和瞬时值。

2.15 已知自由空间中的电磁场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 1000 \cos(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$, $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y 2.65 \cos(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$,式中, $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.42 \text{ rad/m}$ 。试求:(1)瞬时坡印廷矢量;(2)平均坡印廷矢量。

2.16 在球坐标系中,已知电磁场的瞬时值

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{e}_\theta \frac{E_0}{r} \sin \theta \cos(\omega t - \beta r) \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{e}_\phi \frac{E_0}{\eta_0 r} \sin \theta \cos(\omega t - \beta r) \text{ A/m}$$

式中, E_0 为常数, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$, $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。试计算以坐标原点为球心,以 r_0 为半径的球面 S 的总功率。

2.17 已知某电磁场的复数形式为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x i E_0 \sin(k_0 z)$, $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0 \cos(k_0 z)$,式中, $k_0 = 2\pi / \lambda_0 = \omega / c_0$, c_0 是真空中光速, λ_0 是波长。试求:(1) $z = 0$, $\lambda_0/8$, $\lambda_0/4$ 各点处的坡印廷矢量瞬时值;(2)上述各点处的平均坡印廷矢量的值。

2.18 自由空间中, $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x 50 \cos(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$ 。在 z 为常数的平面中,试求穿过半径为 2.5 m 的圆面积内的平均功率 \bar{P}_{av} 。

2.19 证明:电磁能量密度 $\left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2\right)$ 和坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 在下列变换下都具有不变性:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} \cos \theta + \eta \mathbf{H} \sin \theta, \quad \mathbf{H}_1 = -\frac{1}{\eta} \mathbf{E} \sin \theta + \mathbf{H} \cos \theta$$

式中, θ 为任意角度, $\eta = \sqrt{\mu / \epsilon}$ 。

2.20 试将麦克斯韦方程的微分形式写成8个标量方程。

第 3 章 介质中的麦克斯韦方程组

前面我们在推导麦克斯韦方程组的时候，并未考虑场中存在介质的情况。所谓介质就是通常所说的绝缘物质，如木材、橡胶、塑料、石油和空气等。按照介质在电磁场中所表现的不同特性，可将其分为电介质和磁介质。电介质物质的原子核对核外电子有很强的束缚力，因而理想的电介质不导电。但当把一块电介质放入电场中时，它会受到电场的作用，其分子或原子内的正、负电荷将在电场力的作用下产生微小的弹性位移或偏转，形成一个个小电偶极子，这种现象称为电介质的极化。被极化的电介质内部存在着大量的小电偶极子，它们产生的所谓附加电场反过来会影响原来的电场。同样，当把一块介质放入磁场中时，它也会受到磁场的作用，其中也会形成一个个小的磁偶极子，这种现象称为介质的磁化。被磁化的介质内部存在着大量的小磁偶极子，它们产生的所谓附加磁场反过来会影响原来的磁场。

本章将讨论介质的极化或磁化问题，在此基础上重新构建介质中的麦克斯韦方程组，这时方程中所描述的电场和磁场中将会包含介质的极化或磁化所产生的附加场。通过分析发现，如果引入极化矢量 \mathbf{P} 和磁化矢量 \mathbf{M} ，就可以很方便地来描述普通介质中麦克斯韦方程组的一般形式。本章还将引入介质中相对介电常数 ϵ_r 的定义，而且会看到 ϵ_r 与介质折射率 n 之间存在着直接的联系。在获得介质中麦克斯韦方程组的一般形式后，本章最后描述了方程所涉及的各个相关矢量应满足的边界条件。

3.1 分子模型

虽然下面要对分子进行普遍和有意义的讨论，但是我们关于分子的结论同样也可以适用于原子，比如说氦。分子模型是由正、负电荷组成的，在许多介质中，组成分子的正、负电荷可看成是分子的两个对立的部分，比如氯化氢 H^+Cl^- 。但在以下的讨论中，我们假定所取的简单模型的分子并非由这两种对立的部分组成，而是对外表现为电中性，例如甲烷 CH_4 ，其正电荷与负电荷相互抵消，分子所呈现的净电荷为零。当然，电场的作用会使这些电荷分离开来，从而在分子中产生电偶极子，下面我们就来讨论这种电荷的分离情况。

假设电场中分子内部的电荷 q 在电场的作用下从它的平衡位置移动了一段距离 x ，如果被移动的电荷质量为 m ，其受到的恢复力与位移成正比，那么电荷的受力方程可以表示为

$$qE = m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right) \quad (3.1)$$

式中， E 是该电荷处的电场强度； x 是沿 \mathbf{E} 方向的实际位移； α 为衰减系数； ω_0 为谐振频率。上述方程中考虑到了对该电荷的速度产生影响的阻尼力 $m\alpha(dx/dt)$ ，另外两项分别为它的恢复力 $m\omega_0^2 x$ 和加速度 $m(d^2x/d^2t)$ 。

下面我们详细地说明电场强度 \mathbf{E} 的时间函数特性。以时谐场为例， \mathbf{E} 为时间函数，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t) \quad (3.2)$$

设 E_0 为常矢量 \mathbf{E}_0 的大小, 由于分子可以被认为是束缚在固定的位置上, 所以不需要考虑 \mathbf{E} 除了位移之外的其他分量。假设处于平衡状态的电荷在电场作用下按照与电场相同的频率振荡, 则位移可以表示为

$$x = x_0 \exp(i\omega t) \quad (3.3)$$

式中, x_0 为常量, 通常对于位移这种物理量只取复数的实部。将式 (3.3) 代入式 (3.1) 可得

$$qE = m[-\omega^2 x + \alpha(i\omega x) + \omega_0^2 x] \quad (3.4)$$

因此有

$$x = \frac{qE/m}{-\omega^2 + (i\omega\alpha) + \omega_0^2} \quad (3.5)$$

式中虚部与衰减系数 α 有关, 这表明我们所讨论模型的衰减使得位移与电场力不同相。从上述表达式中很容易得出位移 x 的实部, 但是从复数形式却可以明显地看出 x 和 \mathbf{E} 之间的相位关系。

振荡电场的作用在分子内会产生一个振荡的电偶极子, 在第2章中曾对电偶极子进行过简单的讨论, 并且定义了电偶极矩, 即

$$p_e = qx \quad (3.6)$$

于是

$$p_e = \frac{q^2 \mathbf{E}(t)/m}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2} \quad (3.7)$$

电偶极矩是时间的函数, 它与 \mathbf{E} 的方向相同。若引入分子极化率 α_p , 即令

$$\alpha_p = \frac{q^2/m\varepsilon_0}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2} \quad (3.8)$$

那么式 (3.7) 可以简化为

$$p_e = \varepsilon_0 \alpha_p \mathbf{E} \quad (3.9)$$

式中, α_p 是反映分子固有特性的一个函数, 同时也是所施加场强 \mathbf{E} 的角频率 ω 的函数。对于单个分子来说, 上述各种关系式就是我们对介质进行微观描述的基础知识。

3.2 电介质及其极化

3.2.1 极化的概念

电介质实际上就是绝缘材料, 其中不存在自由电荷, 带电粒子是以束缚电荷形式存在的。一般来讲, 电介质可分为两大类: 第一类是无极分子电介质, 当没有外电场作用时, 这类电介质中正、负电荷的中心是重合的, 处于电中性状态, 对外不显电性, 如 H_2 、 N_2 等气体物质。第二类是有极分子电介质, 当没有外电场作用时, 这类电介质中的正、负电荷中心不重合, 每个分子可等效为一个电偶极子, 但由于分子的无规则热运动, 使得电偶极子的分布排列是无规则的。因此, 整体仍呈电中性, 对外也不显电性。

在外电场作用下, 无极分子所组成的电介质的正、负电荷“重心”将产生相对位移, 形成等效电偶极子, 并且所有的等效电偶极子将随外电场方向呈规则排列。外电场越强, 相对位移就越大, 等效电偶极矩 p_e 也越大。

对于均匀电介质整体来说,在外电场 \mathbf{E} 作用下,垂直于电场的电介质的两个表面上出现正、负电荷,然而这种电荷与导体中的自由电荷不同,它不能离开电介质,也不能在电介质内部自由移动,它们的移动范围会受到分子的约束,故称之为束缚电荷。

对于有极分子,在外加电场作用下,各个分子的等效电偶极子将受到一个力矩 \mathbf{T} 的作用:

$$\mathbf{T} = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E}$$

在力矩 \mathbf{T} 的作用下,分子的电偶极矩 \mathbf{p}_e 在转向电场的方向产生转向,外加场越强,转向的效果也越显著,排列就越整齐,各个分子的等效电偶极矩在电场方向上分量的总和也越大。但由于分子的热运动,不可能使所有分子的电偶极矩都按电场的方向排列起来,在有极分子电介质与外电场垂直的界面上,同样也会出现束缚电荷。

这种在外电场作用下,电介质中出现有序排列电偶极子及表面上出现束缚电荷的现象,就是电介质的极化现象。无极分子的极化称为位移极化,有极分子的极化称为转向极化。

3.2.2 极化矢量 \mathbf{P}

相对于“束缚电荷”而言,有一些自由离子或自由电子会在外电场的作用下被吸引进介质,这些电荷的运动不受分子约束力限制,故被称为“自由电荷”,于是可以将介质中这两种不同类型的电荷集中表示为

$$\rho(r, t) = \rho_f(r, t) + \rho_b(r, t) \quad (3.10)$$

或者说,介质中的总电荷密度 $\rho(r, t)$ 被分成了自由电荷密度 $\rho_f(r, t)$ 和束缚电荷密度 $\rho_b(r, t)$ 两部分,束缚电荷密度有时又称为分子电荷密度。

注意: 很高的场强可能会使介质中的束缚电荷摆脱分子约束而变成自由电荷,这种现象称为介质的“击穿”现象。显然,上面所说的自由电荷并不是这一类电荷。本书不讨论介质击穿问题。

类似地,总电流密度 \mathbf{J} 也可以被分为

$$\mathbf{J}(r, t) = \mathbf{J}_f(r, t) + \mathbf{J}_b(r, t) \quad (3.11)$$

式中, $\mathbf{J}_f(r, t)$ 是自由电流密度; $\mathbf{J}_b(r, t)$ 是束缚电流密度或称为分子电流密度。

下面我们将引入一个所谓的极化矢量 \mathbf{P} 来描述电介质的极化特性或极化程度。定义极化矢量(也称为极化强度矢量)为单位体积内的电偶极矩矢量和,即

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_e}{\Delta V} \quad (3.12)$$

式中, $\sum \mathbf{p}_e$ 是 ΔV 体积元中的电偶极矩矢量和。从式(3.12)可知,矢量 \mathbf{P} 的大小等于按照介质中分子电荷受极化后的重新分布,流过点 (r, t) 的每单位面积上的分子电荷量。 \mathbf{P} 的方向为任一点 (r, t) 上分子电荷运动的方向。因此,极化矢量 \mathbf{P} 也能反映分子电荷的运动情况,根据 \mathbf{P} 能够考察每一点上的电荷动态,它在任意时刻的值都由通过该点的电荷净流量所确定,这是因为介质中的电荷分布呈中性。

研究发现,束缚电流密度 \mathbf{J}_b 与分子电荷的运动相关联,即有

$$\mathbf{J}_b = \partial \mathbf{P} / \partial t \quad (3.13)$$

设一介质的体积为 V , 表面积为 S , 如果该介质被极化,则一般就可以假定流入体积 V

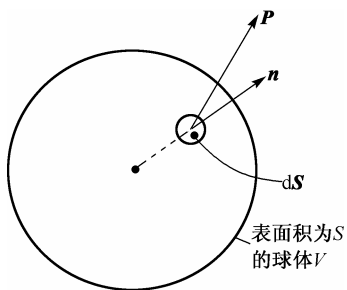


图 3.1 检测电荷流量

和流出体积 V 的电荷相等，而通过检测流过单位面积元 dS 上的电荷流量就可得出该介质上总的电荷流量，如图 3.1 所示。

由于电中性，有

$$\sigma = P \cdot n dS \quad (3.14)$$

式中， σ 为穿过 dS 的电荷量； n 是面元 dS 上的外法向单位矢量。我们取正电荷向外流动时的值为正值，因为在这种情况下 $P \cdot n$ 为正，当 P 与 n 为同方向时可得出 P 的最大值。流出体积 V 的正电荷的总流量为

$$\Delta Q = \int_S P \cdot n dS \quad (3.15)$$

由于上述体积内的电荷量要保持电中性，所以在体积 V 中，必定有等量的负电荷存在，这些电荷可以由体积 V 中的电荷密度 $\rho_b(r, t)$ 来确定，有

$$-\Delta Q = \int_V \rho_b(r, t) dV \quad (3.16)$$

式中， dV 为体积元。上述两式必定相等，即

$$\int_S P \cdot n dS = - \int_V \rho_b(r, t) dV \quad (3.17)$$

对式 (3.17) 左边应用高斯定律，可得

$$\int_V \nabla \cdot P dV = - \int_V \rho_b(r, t) dV \quad (3.18)$$

由于式 (3.18) 适用于任意体积 V ，故有

$$\nabla \cdot P = -\rho_b \quad (3.19)$$

这说明极化矢量 P 的散度与束缚电荷密度 ρ_b 有关，而 P 对时间的导数则等于束缚电流密度 J_b 。

3.2.3 介质的分子模型与极化矢量

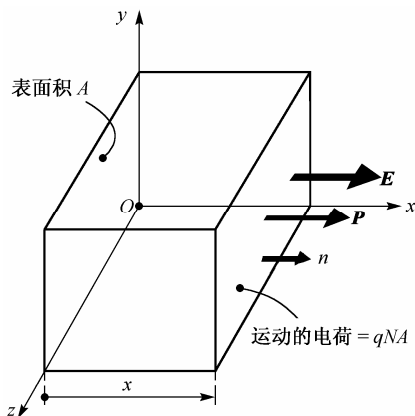
除了极化矢量 P 与束缚电荷密度 ρ_b 和束缚电流密度 J_b 之间的关系外，我们还希望建立 P 与电偶极矩 p_e 之间的联系。

假设某介质的单位体积内包含有 N 个分子，并且假定介质中有一垂直于极化方向 (x 方向) 且面积为 A 的平面，如果每个分子电荷 q 在电场 E 所极化的介质中沿 x 轴方向移动了距离 x ，则穿过该平面的总电荷 (平均值) 为 $qNx A$ ，如图 3.2 所示。

由于所定义的极化矢量 P 就是用来测量移动电荷的，因此如果对 P 值求面积积分，将会得出移动的电荷量，即

$$qNx A = \int_A P dA$$

其中 dA 是 A 的面元，我们还可将其写为

图 3.2 包含 N 个分子的介质体积

$$\int_A P dA = P_{av} A \quad (3.20)$$

式中, P_{av} 是面积 A 上 P 的平均值。下面就来求这个平均值。

我们知道 $\mathbf{P}(r, t)$ 是一个在每一点都有值的矢量, 如果介质是由很容易被分开的离散分子如低密度气体所组成的, 则 P 值的大小在 A 表面上各点处是不相同的, 于是有

$$qNx A = P_{av} A \quad (3.21)$$

$$\text{即} \quad Np_c = P_{av}$$

$$\text{或者} \quad P_{av} = Np_c \quad (3.22)$$

式中, P_{av} 与 p_c 同方向。在 3.1 节中曾得到

$$p_c = \epsilon_0 \alpha_p \mathbf{E} \quad (3.23)$$

$$\text{于是有} \quad P_{av} = \epsilon_0 N \alpha_p \mathbf{E} \quad (3.24)$$

式(3.23)是在电场 \mathbf{E} 使分子产生极化的基础上, 相对于单个分子所得出的结论。在介质密度足够低的情况下, 如果单个分子的极化不会影响到相邻电荷所受到的电场, 那么这个结论就是成立的。在低密度气体中, 除了分子间发生的偶然碰撞之外, 一般情况都可以用式(3.24)来描述。但在高密度介质中, 由于分子紧密相邻因而彼此会有影响, 所以需要对其产生的附加场进行讨论。

从式(3.23)和式(3.24)还可以知道, 电介质中的电偶极矩 p_c 和极化矢量 \mathbf{P} 都是由外电场 \mathbf{E} 感应的。于是, 当电偶极矩及极化矢量与外电场 \mathbf{E} 成正比时, 就称这种介质是线性的。如果电介质的电特性与方向无关, 则称这种介质是各向同性的。如果电介质的各部分性质相同, 则称这种介质是均匀的。

3.2.4 高密度介质中的电场

可以设想一旦介质被极化, 所形成的电荷分布将会使得介质中的电场计算问题变得复杂, 特别是当介质中的分子包含有恒定偶极子时尤其如此。原则上, 可以假定介质中所有电荷的位置为已知, 这时可以利用一般形式的麦克斯韦方程组来进行计算。但如果只考虑比较简单的介质, 即其中不存在恒定偶极子的情况时, 则可以采用另一种更为适宜的计算方法。

现在来考察一种介质, 它是由呈气态或液态的中性分子所组成的。对于这种流体介质, 一般可以认为它是各向同性的。由于单个分子中的电荷是分离的, 所以如果施加一个电场就会产生介质的极化, 极化的方向与所施加电场的相同。比如, 在静电场的情况下, 介质充斥于平行板电容器的两个极板之间, 介质中任一点处的场与下列因素有关: ①金属板上的电荷与介质极化面电荷所构成的介质外表面的电荷分布; ②所考察的场点周围分子偶极子所产生的附加影响。前一种因素的作用较为简单, 它可由单位面积上的净电荷 σ (C/m^2) 来确定, 即

$$E_{(i)} = \sigma / \epsilon_0 \quad (3.25)$$

这个结果在例 2.3 中进行过推导。如图 3.3 所示, 在图 3.3(a) 和 (b) 中用恒压源对平行极板电容器进行充电来说明这种情况。平行极板电容器中填充的介质使附加电荷从理想电压源流出, 去与介质的表面极化电荷相平衡, 从而维持电压差。然而, 在电容极板上仍会有净表面电荷 σ , 由这些电荷所产生的电场可由式(3.25)计算出来。

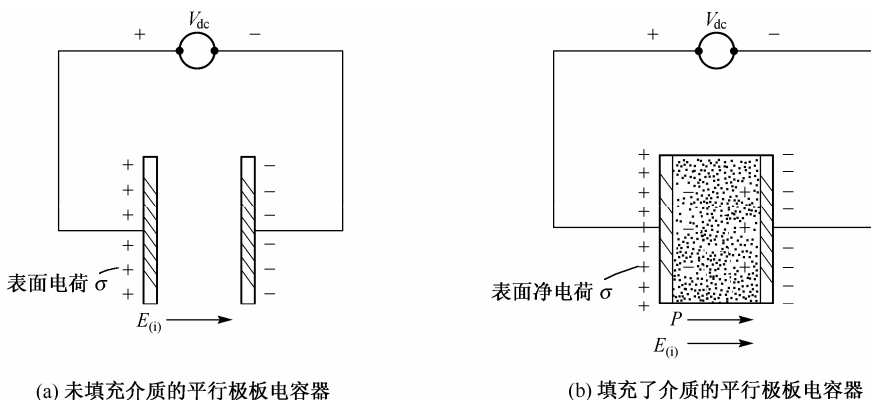


图 3.3 平行极板电容器

在对上述第二种因素的影响进行讨论时, 我们遵循的是洛伦兹的方法, 即作一个包围场点的球面, 如图3.4(a)所示。在球面的内部, 可认为介质能够体现出单个分子的特性, 而在球面外部则认为介质是呈电中性的。正如在例 2.1 中所看到的那样, 这种假设是合理的, 因为单个的电偶极子所产生的电场与 r^3 成反比, 故而在足够远处是可以忽略的。

连续介质的球形表面(虚构的)会存在着由 \mathbf{P} 所产生的面电荷, 而为了得出这种球形表面电荷所产生的电场 \mathbf{E}_s , 围绕着电场的方向假定在 x 方向取一个带状的圆环, 如图3.4(b)所示。

如果环带的宽度为 $Rd\theta$, 那么环带上所包含的面电荷为 $(P \cos \theta)2\pi(R \sin \theta)Rd\theta$ 。这些电荷在球的中心产生一个仅含 x 分量的电场, 大小为

$$\frac{[(P \cos \theta)2\pi(R \sin \theta)Rd\theta] \cos \theta}{(4\pi\epsilon_0)R^2}$$

则表面电荷在球体中心产生的总的场等于上式对整个球表面的积分, 即

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[-\frac{P \cos^2 \theta d(\cos \theta)}{2\epsilon_0} \right] = \left[-\frac{P_{av} \cos^3 \theta}{6\epsilon_0} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = P_{av}/3\epsilon_0 \quad (3.26)$$

显然, 所得到的是极化平均值。

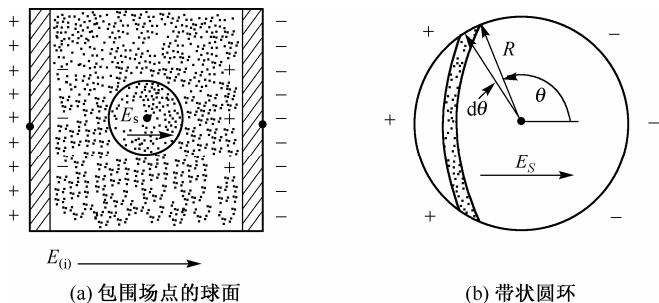


图 3.4 场点周围分子偶极子产生附加影响的情形

现在我们来确定球体内单个分子偶极子所产生的场。根据例 2.1 中得出的关于由电偶极子形成的场的结论, 便可以导出每个分子偶极子 p_e 所产生的场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{r^3} \right] \quad (3.27)$$

为了简便起见, 式中位置矢量 \mathbf{r} 从位于球体中心的场点指向球体内偶极子, 分子偶极子的方向均与电场方向 (x 方向) 相同, 于是可以得出全部分子偶极子在球体中心的总的场强为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \left[\frac{3(p_{\text{ex}}x)(\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z)}{r^5} - \mathbf{e}_x \left(\frac{p_{\text{ex}}}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_{\text{ex}}}{r^3} \right) \mathbf{e}_x \sum \left(\frac{3x^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_{\text{ex}}}{r^3} \right) \sum \left(\mathbf{e}_y \frac{xy}{r^2} + \mathbf{e}_z \frac{xz}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

因为 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 而且在球体内部存在大量的分子, 所以 x^2 的平均值为 $r^2/3$, 而 xy 与 xz 的平均值为零, 因此由式 (3.28) 所确定的全部分子偶极子所产生的场强矢量之和的值为零。

这样, 能在球体中心产生电场就只剩下两个来源: ①介质外表面极板上的电荷; ②球的内表面上的极化电荷。因此, 局部电场可以表示为

$$\mathbf{E}_{\text{local}} = \mathbf{E}_{(\text{i})} + \mathbf{E}_{(\text{ii})}$$

$$\text{即} \quad \mathbf{E}_{\text{local}} = \mathbf{E}_{(\text{i})} + \frac{\mathbf{P}_{\text{av}}}{3\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{P}_{\text{av}}}{3\epsilon_0} \quad (3.29)$$

式中, σ 是介质表面上单位面积表面的净电荷。式 (3.29) 称为洛伦兹局部电场的表达式, 它说明局部电场的影响可使电场增强 $\mathbf{P}_{\text{av}}/3\epsilon_0$ 。

3.2.5 考虑极化效应的麦克斯韦方程组

上述结论与介质结构的情况无关, 具有普遍意义。于是, 我们就可以对任何介质写出其应满足的麦克斯韦方程组。

麦克斯韦第一方程的原有形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (3.30)$$

根据式 (3.10) 和式 (3.19), 可将其改写为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{f}} + \rho_{\text{b}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{f}} + (-\nabla \cdot \mathbf{P})}{\epsilon_0}$$

$$\text{即} \quad \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{f}}}{\epsilon_0} \quad (3.31)$$

麦克斯韦第四方程的原有形式为

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

根据式 (3.11) 和式 (3.13), 也可将其改写为

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}_{\text{f}} + \mathbf{J}_{\text{b}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}_{\text{f}}}{\epsilon_0} + \left(\frac{1}{\epsilon_0} \right) \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.32)$$

$$\text{即有} \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}_{\text{f}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \quad (3.33)$$

于是, 可以写出考虑了极化效应后的一般介质中的麦克斯韦第一方程和第四方程分别为

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{f}}}{\epsilon_0}, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}_{\text{f}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right)$$

为了与自由空间的麦克斯韦方程组在形式上表达相一致，同时也为了更好地描述介质中的电场问题，下面引入电位移矢量的概念。

在式(3.33)中，令

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.34)$$

对于线性、均匀、各向同性的电介质，由于 $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \alpha_p \mathbf{E}$ ，因而

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \alpha_p \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \alpha_p) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.35)$$

我们称式(3.35)为反映介质极化的物态方程，式中 ε 称为电介质的介电系数， $\varepsilon_r = 1 + \alpha_p$ 称为电介质的相对介电系数。由于 \mathbf{D} 中的第二项 $\varepsilon_0 \alpha_p \mathbf{E}$ 是电介质极化时由束缚电荷位移所产生的效应，故将 \mathbf{D} 称为介质中的电位移矢量(注：在自由空间中， $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ，称 \mathbf{D} 为电通密度；在电介质中，为了以示区别，应将 \mathbf{D} 称为电位移矢量)。于是，一般电介质中的麦克斯韦第一方程和第四方程可描述为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.36)$$

式中， $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ (考虑了电介质极化效应)。

从以上描述可以看出，新引入的极化矢量 \mathbf{P} 与麦克斯韦方程组中的其他物理量一样，在空间中每一点 (r, t) 都具有相应的值，可以发现介质中各点的 \mathbf{P} 相差甚远，如同电场强度矢量 \mathbf{E} 与磁感应强度矢量 \mathbf{B} 那样。一般情况下，在介质中进行测量时都会涉及到大量的分子，而且体积也比分子的大小要大得多，因此在极化介质中测定电荷的流动情况时，应根据测量结果计算出 \mathbf{P} 的平均值。

例 3.1 如图3.5所示，点电荷 $+Q$ 位于介质球壳的球心，球壳内半径为 R_1 ，外半径为 R_2 ，球壳的相对介电常数为 ε_r ，壳外为真空。试求球壳外任意一点处的电场强度矢量 \mathbf{E} 、电位移矢量 \mathbf{D} 和极化矢量 \mathbf{P} 。

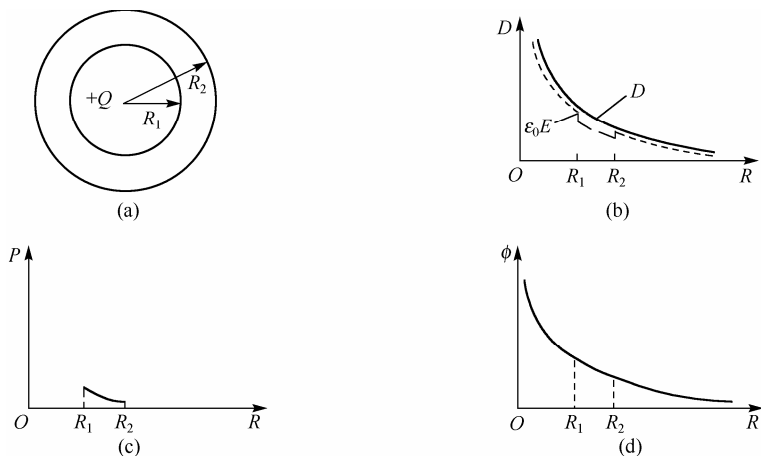


图 3.5 点电荷在介质球壳内外产生的电场

解：按题意该电场为球对称场，应使用高斯定律来求解 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} ，再根据式(3.34)求极化矢量 \mathbf{P} 。

由

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV = Q$$

将 $\mathbf{D} = D_R \mathbf{e}_R = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_R \mathbf{e}_R$ 代入上式, 得

$$E_R = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R^2}$$

所以

$$\mathbf{E} = E_R \mathbf{e}_R = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R^2} \mathbf{e}_R$$

且

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi R^2} \mathbf{e}_R$$

故

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R^2} \mathbf{e}_R$$

3.3 折射率与相对介电常数

折射率这个量在后续各章中都非常有用, 介质的**折射率** n 被定义为

$$n = c/v \quad (3.37)$$

式中, c 是电磁波在自由空间的速度(光速); v 是电磁波在折射率为 n 的介质中的速度。

前面我们已经定义了一个反映介质特性的量——相对介电常数 ε_r , 并且

$$\varepsilon_r = \frac{E + P/\varepsilon_0}{E} \quad (3.38)$$

容易证明(见例 3.2), 在静电场情况下, ε_r 为平行板电容器的两个极板之间填充相对介电系数为 ε_r 的介质后其电容的增加倍数。

例 3.2 试证明当平行板电容器的极板间填充相对介电系数为 ε_r 的介质后, 其静电电容增大 ε_r 倍。

证明: 电容 C 的定义式为

$$C = Q/V$$

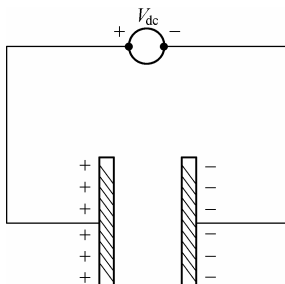


图 3.6 端接恒定电压源的电容器

式中, Q 为正极板上的电荷; V 为极板间的电位差。我们知道, 电场中某一点的电位被定义为将一个单位正电荷从无穷远处移到该点处电场力所做的功。若电容器的平行板之间存在着均匀电场 \mathbf{E} , 则其电位差应为 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$, 这里 \mathbf{d} 是极板间的距离。下面的分析并不太复杂, 因为在“测量”过程中总可以为电容器提供一个恒定的电压源(见图 3.6), 这时电容增加的系数为

$$C/C_0 = Q/Q_0$$

式中, C_0 和 Q_0 为其未被填充介质时的电容和电荷量; C 和 Q 则是其被填充介质后的相应值。如图 3.7 所示, 如果电容器在填充介质前后其正极板上单位面积的电荷密度分别为 σ_0 和 σ , 则有

$$C/C_0 = \sigma/\sigma_0$$

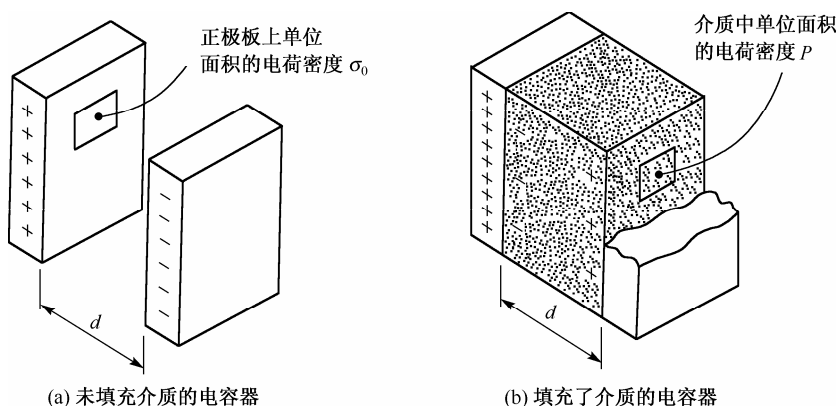


图 3.7 电容器

于是上面的问题就变为当电容器被填充介质后 σ 增加了多少的问题。极化的影响总是试图将净电荷量减少 P ，但是如果电位差维持不变，那么电场也必须保持不变。而电场是由表面净电荷除以 ϵ_0 得到的 (见例 2.3)，为了保持表面净电荷量维持不变，需要有额外的电荷流向极板，以使得 σ_0 增大 P ，即 $\sigma = \sigma_0 + P$ ，这样便有

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 + P}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0/\epsilon_0 + P/\epsilon_0}{\sigma_0/\epsilon_0} = \frac{E_0 + P/\epsilon_0}{E_0}$$

根据 ϵ_r 的定义可得

$$C/C_0 = \epsilon_r$$

下面我们来寻求折射率 n 与 ϵ_r 之间的关系。令自由电荷密度 ρ_f 和自由电流密度 \mathbf{J}_f 均为零，则介质中的麦克斯韦方程组变为

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = 0 \quad (3.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (3.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.41)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \quad (3.42)$$

在式 (3.42) 中应用 ϵ_r 的定义，又有

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

对方程两端取旋度，可得

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

这里， \mathbf{E} 仍假设为一个对于时间和空间无关的函数，因此可以交换对时间和空间的微分顺序，同时再使用矢量恒等式，并将式 (3.40) 代入上式，可得

$$c^2 [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}] = \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

考虑到式 (3.41)，则有

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (3.43)$$

这是一个关于 \mathbf{B} 的三维的波动方程，并且有

$$\begin{aligned} v^2 &= c^2 / \epsilon_r \\ \text{由式(3.37)可得} \quad v^2 &= c^2 / n^2 \\ \text{因而有} \quad n^2 &= \epsilon_r \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.4 介质的磁化

3.4.1 磁化的概念

介质的磁化和介质的极化一样，也是与物质的结构紧密相关的。根据原子的简单模型，电子沿圆形轨道围绕原子核旋转，其作用相当于一个圆电流，即一个小电流环，这个小电流环可等效为在前面所定义过的磁偶极子。由于热运动等原因，物质中的圆电流产生的磁场常常互相抵消，因而总体对外并不显磁性。

介质中的电子和原子核都是束缚电荷，它们进行的轨道运动和自旋运动都是微观运动，由束缚电荷的微观运动形成的电流即为束缚电流，也称为磁化电流。在没有外加磁场的作用下，绝大部分材料中所有原子的磁偶极矩的取向是杂乱无章的，结果总的磁矩为零，对外不呈现磁性。

在外磁场的作用下，物质中的原子磁矩将受到一个力矩的作用，所有原子磁矩都趋于与外磁场方向一致的排列，彼此不再抵消，结果对外产生磁效应，影响磁场分布，这种现象称为物质的磁化。

3.4.2 磁化电流与磁化矢量 \mathbf{M}

与极化矢量的定义类似，为了描述并衡量介质的磁化程度，我们定义磁化强度矢量 \mathbf{M} 为单位体积内磁偶极矩的矢量和：

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (3.45)$$

式中，磁偶极矩 $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}n$ 是一个分子电流的磁矩，或者说是电流为 I 、面积为 S 的小圆环电流的磁矩。面积 S 的方向应与与电流 I 的方向成右手螺旋螺旋定则， $\sum \mathbf{p}_m$ 是 ΔV 体积元中的分子磁矩的矢量和。因此， \mathbf{M} 可看成是单位体积中分子磁矩的矢量和。在这里，被磁化的介质产生的总体磁效应可以看成是由等效的磁化电流即束缚电流形成的。束缚电流产生的磁场等效于所有分子电流产生磁场的矢量总和，可以证明，介质磁化后对磁场的影响可用磁化电流密度 \mathbf{J}_m 来等效，并且

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3.46)$$

磁化电流不同于自由电流，其电荷运动是被束缚在介质内部的，因此也称为束缚电流。

3.4.3 磁场强度

现在来讨论磁介质中磁感应强度 \mathbf{B} 、磁化矢量 \mathbf{M} 和磁场强度 \mathbf{H} 之间的关系。引入磁化电流后，磁介质中安培环路定律的微分形成可写成

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_m + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.47)$$

式中, μ_0 为自由空间的磁导率。由式(3.46)可得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J}_c + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{即} \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.48)$$

$$\text{令} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (3.49)$$

$$\text{可得} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.50)$$

式(3.50)是一般介质中安培环路定律的微分形式, 是考虑了磁化效应以后的麦克斯韦第四方程。这里的磁场强度 \mathbf{H} 被视为是介质中的一个场函数, 与自由空间的磁场强度 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ 相比, 引入了磁化矢量 \mathbf{M} 。

对于线性、各向同性及均匀磁介质, 由实验可证明, \mathbf{M} 与 \mathbf{H} 成正比, 即

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.51)$$

式中 χ_m 为磁化率, 是一个标量常数。将式(3.51)代入式(3.49), 可得

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\text{所以有} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.52)$$

我们称式(3.52)为反映介质磁化的物态方程, 式中 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 是磁介质的磁导率, $\mu_r = 1 + \chi_m$ 是磁介质的相对磁导率。

3.4.4 磁介质

所谓磁介质, 就是在外加磁场的作用下, 能产生磁化现象, 并能影响外磁场分布的物质。事实上, 除了真空外, 其他任何物质都是可磁化的磁介质, 只不过磁化效应的强弱存在差别而已。根据物质的磁效应的不同, 磁介质通常可分为抗磁质、顺磁质、铁磁质、亚铁磁质等。

1. 抗磁质

抗磁质主要是由电子轨道磁矩产生磁化现象引起的, 在外磁场的作用下, 电子轨道磁矩的方向和外磁场的方向相反。这时磁化率 χ_m 为负, 相对磁导率 $\mu_r < 1$, 即 \mathbf{M} 与 \mathbf{B} 的方向相反, 磁介质内 \mathbf{B} 变小。

2. 顺磁质

顺磁质主要是由电子自旋磁矩引起的。轨道磁矩的抗磁效应不能完全抵消它, 在外磁场作用下电子的自旋磁矩和外磁场方向一致, 即 \mathbf{M} 与 \mathbf{B} 方向相同, 磁化率 $\chi_m > 0$, 相对磁导率 $\mu_r > 1$ 。

上述两种磁介质的磁化率都较小, μ_r 均在 1 附近。工程上常常将这些磁效应很弱的材料看成是非磁性材料。

3. 铁磁质

在外磁场的作用下,呈现强烈的磁化,能明显地影响磁场的分布,这类材料称为铁磁材料。在铁磁材料中,存在许多天然小磁化区,即磁畴。每个磁畴由多个磁矩方向相同的原子组成,在无外磁场作用时,各磁畴排列混乱,总磁矩相互抵消,对外不显磁性。但在外磁场作用下,磁畴企图转向外磁场方向排列,形成强烈磁化。因此,铁磁性物质的磁化,是由于外磁场与磁畴共同作用的结果。撤去外磁场后,部分磁畴的取向仍保持一致,对外仍然呈现磁性,称为剩余磁化。时间长了,或温度升高,剩余磁化会消失。铁磁材料是一种非线性磁介质,其曲线与磁化历史有关,形成了一个磁滞回线。

4. 亚铁磁质

亚铁磁质是指其中某些分子(或原子)的磁矩与磁畴平行,但方向相反的材料。在外磁场作用下,这类材料也是呈现较大磁效应,但由于部分反向磁矩的存在,其磁性比铁磁材料要小。在工程技术上用得较多的是铁氧体,其最大特点是:磁导率是各向异性的,而介电常数则呈各向同性。

例 3.3 某一各向同性材料的磁化率 $\chi_m = 2$, 磁感应强度 $\mathbf{B} = 20\mathbf{y}\mathbf{e}_x (\text{mWb/m}^2)$, 求该材料的相对磁导率 μ_r 、磁导率 μ 、磁化电流密度 \mathbf{J}_m 、传导电流密度 \mathbf{J}_c 、磁化强度 \mathbf{M} 和磁场强度 \mathbf{H} 。

解: 根据关系式 $\mu_r = 1 + \chi_m$, 得

$$\mu_r = 1 + 2 = 3$$

且

$$\mu = \mu_r \mu_0 = 3 \times 4\pi \times 10^{-7} = 3.77 (\mu\text{H/m})$$

又

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu = 5.31\mathbf{y}\mathbf{e}_x (\text{kA/m})$$

而

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = 2\mathbf{H} = 10.61\mathbf{y}\mathbf{e}_x (\text{kA/m})$$

有

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \mathbf{e}_z = -10.61\mathbf{e}_z (\text{kA/m}^2)$$

$$\mathbf{J}_c = \nabla \times \mathbf{H} = -5.31\mathbf{e}_z (\text{kA/m}^2)$$

3.5 介质中的麦克斯韦方程组

在第2章中,我们已经讨论过自由空间中电磁场的基本定律,给出了自由空间中麦克斯韦方程组的微分形式、积分形式和时谐形式。在上面对电介质和磁介质等介质的宏观电磁性质所做的分析和研究中,我们定义了两个新的场量,即

电位移矢量 \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \text{ (反映介质极化的物态方程)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \alpha_p)$$

磁场强度 \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ (反映介质磁化的物态方程)}$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

它们分别反映了介质的极化和磁化效应。

由此,可以写出考虑了介质的极化和磁化效应后,一般介质中麦克斯韦方程组的微分形式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.53)$$

及一般介质中麦克斯韦方程组的积分形式:

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \end{cases} \quad (3.54)$$

由此可以看出,介质中麦克斯韦方程组和真空中麦克斯韦方程组的表达式在形式上是相同的,只是将其场量推广到了一般介质,而不再局限于真空的情况。

另外,此时电流连续性方程的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\partial \rho / \partial t \quad (3.55)$$

电流连续性方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.56)$$

在例 2.4 中已经证明:由麦克斯韦方程组中的两个旋度方程及电流连续性方程,可导出麦克斯韦方程组中的两个散度方程。也就是说,麦克斯韦方程组的四个方程,再加上电流连续性方程这五个方程中,事实上只有三个方程是独立的。为了获得电磁场的解,还需要利用三个物态方程

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$$

才可得到一般介质中完整的麦克斯韦方程组的解。

3.6 电磁场的边界条件

在实际工作中,往往会涉及到由不同的介质组成的电磁系统。从麦克斯韦方程组的微分形式和物态方程,只能获得一切电磁系统都适用的通解。若要获得给定电磁系统中的特解,还必须知道该系统中不同介质交界面的边界情况,及电磁场在不同介质交界面上所遵循的规律——边界条件。

研究边界条件的出发点仍然是麦克斯韦方程组,但在不同介质的交界面处,由于介质不均匀,介质的性质发生了突变,使得场量也可能产生突变,因此,麦克斯韦方程组的微分形式可能不再适用,而只能从麦克斯韦方程组的积分形式出发,推导出边界条件。

电磁场的边界条件通常包括边界上场量的法向分量之间的关系和切向分量之间的关系,由式(3.54)给出的麦克斯韦方程组的积分形式如下:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \quad (3.57)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.58)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.59)$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.60)$$

电流连续性方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (3.61)$$

从式(3.57)、式(3.58)和式(3.61)可知, \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{J} 的边界条件应根据场量的法向分量去进行研究。从式(3.59)和式(3.60)可知, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的边界条件应根据场量的切向分量去进行研究。下面我们来分别讨论 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{J} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 这 5 个场量的边界条件。

1. 一般介质界面的边界条件

如图3.8所示为两种一般介质的交界面,第一种介质的介电常数、磁导率、电导率分别为 ϵ_1 、 μ_1 、 γ_1 ,第二种介质的分别为 ϵ_2 、 μ_2 、 γ_2 。

(1) 电位移矢量 \mathbf{D} 的边界条件

如图3.9所示,在分界面上取一个小的柱形闭合面,其上下底面与分界面平行,且为 ΔS ,并分别在边界的两边。柱形闭合面高为 h ,是一无限小量,介质界面自由电荷面密度为 σ_s 。

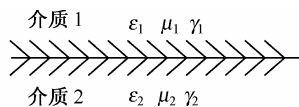


图 3.8 两种一般介质的交界面

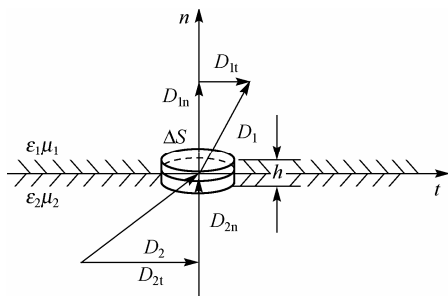


图 3.9 一般介质的法向边界条件

在柱形闭合面上应用高斯定律,有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \sigma_s \Delta S$$

$$\text{则有} \quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s \quad (3.62)$$

用矢量表示为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_s \quad (3.63)$$

式中, σ_s 是分界面上的自由电荷面密度; \mathbf{n} 为面积 ΔS 的法向矢量,由介质 2 指向介质 1。由式(3.62)可知, \mathbf{D} 的法向分量在分界面处产生了突变,该式即为 \mathbf{D} 的法向边界条件。

(2) 磁通密度 \mathbf{B} 的边界条件

与图3.9类似, 由磁场高斯定律 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S = 0$$

即

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.64)$$

写成矢量式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (3.65)$$

式(3.65)表明, \mathbf{B} 的法向分量是连续的, 该式即为 \mathbf{B} 的法向边界条件。

式(3.62)~式(3.65)说明: 当分界面上存在自由电荷时, \mathbf{D} 的法向分量将发生突变, 突变量就等于分界面上的电荷面密度 σ_s 。当 $\sigma_s = 0$ 时, \mathbf{D} 的法向分量是连续的, 而 \mathbf{B} 的法向分量在任何情况下均是连续的。

(3) 电流密度 \mathbf{J} 的边界条件

与图3.9类似, 由电流连续性原理, 有

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

因为

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

所以

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = - \int_V \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV$$

由高斯散度定理得

$$\oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

在小闭合柱面上应用电流连续性定律, 有

$$(J_{1n} - J_{2n}) \Delta S = - \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial q}{\partial t}$$

因为 $h \rightarrow 0$ 为无穷小, 故闭合柱面中包围的自由电荷是分布在交界面 ΔS 上的面电荷。所以

$$q = \sigma_s \Delta S$$

则有

$$(J_{1n} - J_{2n}) \Delta S = - \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \Delta S$$

$$J_{1n} - J_{2n} = - \partial \sigma_s / \partial t \quad (3.66)$$

写成矢量式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = - \partial \sigma_s / \partial t \quad (3.67)$$

式(3.67)表明: 当分界面处电荷面密度发生变化时, 其电流密度的法向分量产生突变, 突变量为电荷面密度的变化率。式(3.67)即为 \mathbf{J} 的法向边界条件。

(4) 电场强度 \mathbf{E} 的边界条件

电场强度 \mathbf{E} 的边界条件通常用电场的切向分量来表示。如图3.10所示, 将界面上的电场强度分解为切向分量

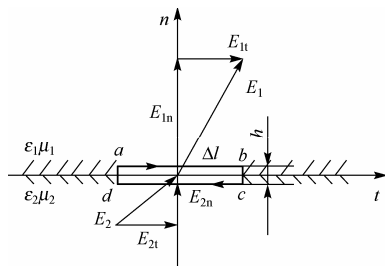


图3.10 一般介质的切向边界条件

和法向分量, 在分界面上取一矩形闭合路径 $abcd$, 该路径的两个 Δl 边与分界面平行, 且分别在分界面两侧, 另外, 两个边的距离 h 为无限小量。

由麦克斯韦第二方程 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$, 得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = - \frac{\partial B}{\partial t} \Delta l h$$

式中, $\frac{\partial B}{\partial t} \Delta l h$ 为矩形回路所包围的磁通变化率。

因为 $\partial B / \partial t$ 为有限值, h 为一无限小量, 所以矩形回路所包围的磁通变化率为零, 即有

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3.68)$$

写成矢量式为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3.69)$$

式(3.69)表明: 电场强度 \mathbf{E} 的切向分量是连续的。式(3.69)称为 \mathbf{E} 的切向边界条件。

(5) 磁场强度 \mathbf{H} 的边界条件

与图 3.10 类似, 由安培环路定律 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$, 按照图 3.10 所示线路积分可得等式左边为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{1t} \Delta l - H_{2t} \Delta l$$

等式右边即闭合回路中穿过的总电流为

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_s \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\Delta l_s + \frac{\partial D}{\partial t} h \Delta l \right)$$

所以

$$H_{1t} - H_{2t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta l_s}{\Delta l} + \frac{\partial D}{\partial t} h \right) = J_s$$

写成矢量式为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (3.70)$$

式(3.70)表明: 当分界面处存在传导电流时, 磁场强度的切向方向将发生突变; 当分界面处不存在传导电流时, 磁场强度的切向方向是连续的。式(3.70)称为 \mathbf{H} 的切向边界条件。

综上所述, \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{J} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 这 5 个场量的边界条件分别分别是

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (3.71)$$

2. 几种特殊介质的边界条件

在研究电磁场问题时, 下述分界面的讨论经常出现。

(1) 两种无损耗线性介质的分界面——即两种理想介质的分界面

理想介质的电导率 $\gamma = 0$, 属无损耗介质。因此, 常将 γ 极低的介质, 如空气和云母视为理想介质。

在 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 的理想条件下, 由 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ 可得 $\mathbf{J}_S = 0$, 于是有如下边界条件:

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \sigma_S, & E_{1t} &= E_{2t} \\ B_{1n} &= B_{2n}, & H_{1t} &= H_{2t}, & J_{1n} &= J_{2n} = 0 \end{aligned}$$

也就是说, 理想介质中不可能有传导电流。

对于无源的情况, 即 $\rho = 0$ 、 $\mathbf{J}_c = 0$ 的情况下, 理想介质的界面上相应的边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

(2) 理想介质和理想导体的界面

理想介质的电导率 $\gamma = 0$, 而理想导体的电导率 $\gamma = \infty$, 工程上常将电导率很高的金属, 如铜、铝、金、银等视为理想导体。

根据 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ 的关系可知, 在理想导体内部不存在电场, 即 $\mathbf{E} = 0$, 否则导体中的传导电流密度将为无穷大。所以, 在介质分界的表面上有

$$E_{2t} = 0, \quad D_2 = 0$$

这将导致 $D_{2t} = 0$, 而在理想导体中, 由于 $\mathbf{B}_2 = 0$, 则 $\mathbf{H}_2 = 0$, 即在介质分界的表面上有

$$B_{2n} = 0, \quad H_{2n} = 0$$

综上所述, 相应的边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_S, & H_{1t} = J_S \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0, & E_{1t} = E_{2t} = 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B}_1 = 0, & B_{1n} = B_{2n} = 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{D}_1 = \sigma_S, & D_{1n} = \sigma_S \end{cases} \quad (3.73)$$

式(3.73)表明: 对于时变电磁场中的理想导体, 电场总是与导体表面相垂直, 而磁场总是与导体表面相切。导体内部既没有电场, 也没有磁场。

(3) 静态电磁场的边界条件

静态电磁场是时变电磁场的特殊情况。在静态场中, 场量不随时间发生变化, 从上面所得到的结论中可得, 静态电磁场的边界条件为

$$\begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \sigma_S, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_S \\ E_{1t} = E_{2t}, & \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ B_{1n} = B_{2n}, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ H_{1t} = H_{2t}, & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

例 3.4 如图3.11所示, 在大地与空气的分界面上, 设土壤中的电场强度为 1210 V/m , 电场与地面法线夹角是 $\theta_2 = 20^\circ$ 。已知土壤的电导率为 $10^{-5} (\text{S/m})$ 、相对介电常数为 6, 试求:

(1) 空气的电场强度值; (2) 空气中电位移矢量值; (3) 空气中电场强度与地面法线的夹角 θ_1 。

解: 令空气为介质 1, 大地为介质 2, 则 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 6\varepsilon_0$, $\gamma_2 = 10^{-5} \text{ S/m}$ 很小, 可视为介质, 根据式(3.57)和式(3.63)可得

$$D_{1n} = D_{2n}$$

即

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

所以

$$\varepsilon_1 |E_1| \cos \theta_1 = \varepsilon_2 |E_2| \cos \theta_2$$

又因为 $E_{1t} = E_{2t}$, 即

$$|E_1| \sin \theta_1 = |E_2| \sin \theta_2$$

因此有

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

此式表明了场量 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 从一种介质进入另一种介质时的折射规律, 或称为折射定律, 有关内容将在后面的章节中详细讨论。

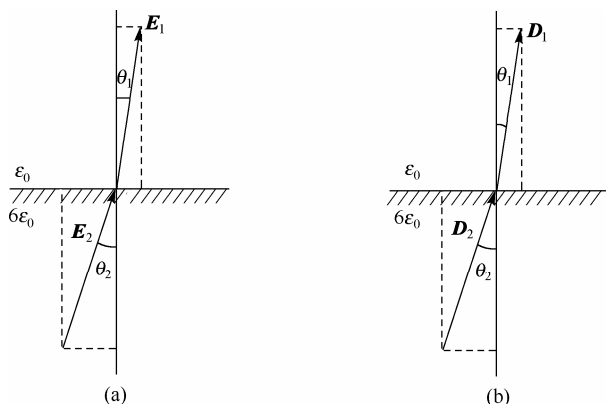


图 3.11 电力线在边界上的折射

根据已知条件可得

$$\tan \theta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \theta_2 = \frac{\varepsilon_0}{6\varepsilon_0} \tan 20^\circ = \frac{1}{6} \times 0.364 = 0.0606$$

所以 $\theta_1 = 3^\circ 28'$, 于是可求出

$$(1) E_1 = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} E_2 = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 3^\circ 28'} \times 1210 = 6840 \text{ (V/m)}$$

$$(2) D_1 = \varepsilon_1 E_1 = 8.85 \times 10^{-12} \times 6840 = 6.0534 \times 10^{-8} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$(3) \theta_1 = 3^\circ 28'$$

例 3.5 设区域 1 ($z < 0$) 的介质为 $\varepsilon_{r1} = 1$ 、 $\mu_{r1} = 1$ 及 $\gamma_1 = 0$; 区域 2 ($z > 0$) 的介质为 $\varepsilon_{r2} = 5$ 、 $\mu_{r2} = 20$ 及 $\gamma_2 = 0$; 区域 1 中电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = [60 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) + 20 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \mathbf{e}_x \text{ (V/m)}$$

区域 2 中电场强度为

$$\mathbf{E}_2 = A \cos(15 \times 10^8 t - 50z) \mathbf{e}_x \text{ (V/m)}$$

试求: (1) 参数 A ; (2) 磁场强度 \mathbf{H}_1 ; (3) 磁场强度 \mathbf{H}_2 ; (4) 证明在 $z = 0$ 处 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 满足边界条件。

解: (1) 由题意知 $z=0$ 为理想介质的界面, 在边界面上

$$\mathbf{E}_1 = (60 + 20)\cos(15 \times 10^8 t)\mathbf{e}_x = 80\cos(15 \times 10^8 t)\mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = A\cos(15 \times 10^8 t)\mathbf{e}_x$$

这里 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 恰好为切向电场, 根据电场的边界条件 $E_{1t} = E_{2t}$ 得

$$A = 80 \text{ (V/m)}$$

(2) 根据麦克斯韦方程, 有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

所以

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}$$

根据题意有

$$\mathbf{E}_1 = E_{1x}\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z$$

所以

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = \frac{\partial E_{1x}}{\partial z}\mathbf{e}_y = [300\sin(15 \times 10^8 t - 5z) - 100\sin(15 \times 10^8 t + 5z)]\mathbf{e}_y$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_1} [300\sin(15 \times 10^8 t - 5z) - 100\sin(15 \times 10^8 t + 5z)]\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{H}_1 = H_{1y}\mathbf{e}_y = [0.1592\cos(15 \times 10^8 t - 5z) - 0.0531\cos(15 \times 10^8 t + 5z)]\mathbf{e}_y \text{ (A/m)}$$

(3) 同理, 由 $\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\mu_2 \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t}$ 可求得

$$\mathbf{H}_2 = 0.1061\cos(15 \times 10^8 t - 50z)\mathbf{e}_y \text{ (A/m)}$$

(4) 将 $z=0$ 代入(2)和(3)中的 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 , 可得

$$\mathbf{H}_1 = 0.1061\cos(15 \times 10^8 t)\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{H}_2 = 0.1061\cos(15 \times 10^8 t)\mathbf{e}_y$$

\mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 正好就是界面上的切向分量, 两者相等, $|H_{1t}| = |H_{2t}| = 0.1061 \text{ (A/m)}$, 满足磁场的边界条件。

例 3.6 介质 1 和自由空间的界面方程为 $3x + 2y + z = 12 \text{ (m)}$, 在界面的原点一侧, 相对介电常数 $\epsilon_{r1} = 3$, 电场强度 $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z \text{ (V/m)}$, 求电场强度 \mathbf{E}_2 。

解: 如图3.12所示, 自由空间一方的法向矢量为

$$\mathbf{e}_n = \frac{3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z}{\sqrt{14}}$$

电场 \mathbf{E}_1 在 \mathbf{e}_n 方向的投影为

$$E_{1n} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_n = 11/\sqrt{14}$$

则

$$\mathbf{e}_{1n} = E_{1n}\mathbf{e}_n = 11/\sqrt{14}\mathbf{e}_n = 2.36\mathbf{e}_x + 1.57\mathbf{e}_y + 0.79\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = -0.36\mathbf{e}_x - 1.57\mathbf{e}_y + 4.21\mathbf{e}_z$$

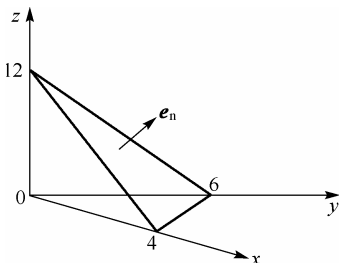


图 3.12 介质和自由空间的边界条件

由 $E_{1t} = E_{2t}$, 得

$$E_{2t} = -0.36e_x - 1.57e_y + 4.21e_z$$

$$D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{1n} = \varepsilon_0 (7.08e_x + 4.17e_y + 2.37e_z)$$

由 $D_{1n} = D_{2n}$, 得

$$D_{2n} = \varepsilon_0 (7.08e_x + 4.17e_y + 2.37e_z)$$

$$E_{2n} = \frac{1}{\varepsilon_0} D_{2n} = 7.08e_x + 4.17e_y + 2.37e_z$$

最后可得

$$E_2 = E_{2n} + E_{2t} = 6.72e_x + 3.14e_y + 6.58e_z \text{ (V/m)}$$

本章小结

1. 在介质中, 电偶极矩 $p_e = \frac{q^2 E(t)/m}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2}$, 若引入分子极化率 α_p , 即令 $\alpha_p = \frac{q^2/m\varepsilon_0}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2}$,

则 $p_e = \varepsilon_0 \alpha_p E$ 。

2. 单位体积内的电偶极矩数称为极化矢量, 即 $P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p_e}{\Delta V}$ 。极化矢量 P 的散度与束缚电荷密度 ρ_b 有关: $\nabla \cdot P = -\rho_b$, 而 P 对时间的导数则等于束缚电流密度 J_b , 即 $J_b = \partial P / \partial t$ 。

3. 电介质的介电系数 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, 其中 $\varepsilon_r = 1 + \alpha_p$ 称为电介质的相对介电系数。

4. 平均极化矢量 $P_{av} = \varepsilon_0 N \alpha_p E$ 。

5. 洛伦兹局部电场的表达式为 $E_{\text{local}} = E_{(i)} + P_{av}/3\varepsilon_0$, 此式说明: 局部电场的影响可使电场增强 $P_{av}/3\varepsilon_0$, 式中 $E_{(i)} = \sigma/\varepsilon_0$ 。

6. 介质的折射率 $n = c/v$, 它与相对介电系数的关系为 $n^2 = \varepsilon_r$ 。

7. 磁偶极矩 $p_m = IS$, 单位体积内磁偶极矩的矢量和称为磁化强度矢量 M , 即

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p_m}{\Delta V}$$

由磁化强度又可得磁化电流密度为

$$J_m = \nabla \times M$$

8. 在各向同性及线性磁介质中, M 与 H 成正比, 即 $M = \chi_m H$, 其中 χ_m 为磁化率, 是一个标量常数。

9. 反映介质磁化的物态方程为 $B = \mu H$, 其中 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 为磁介质的磁导率, $\mu_r = 1 + \chi_m$ 为磁介质的相对磁导率。

10. 考虑介质的极化效应时, 麦克斯韦方程组中将引入极化矢量 P , 这时的麦克斯韦方程组变为

$$\nabla \cdot (E + P/\varepsilon_0) = \rho_f / \varepsilon_0$$

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J}_f / \varepsilon_0 + \partial / \partial t (\mathbf{E} + \mathbf{P} / \varepsilon_0)\end{aligned}$$

11. 考虑介质的磁化效应时, 麦克斯韦方程组中将引入磁化矢量 \mathbf{M} , 这时的麦克斯韦方程组变为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_f / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) &= \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

12. 综合考虑介质极化与磁化效应时, 可得一般介质中的麦克斯韦方程组为

微分形式	积分形式
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$

13. 介质中的电流连续性方程如下。

$$\begin{aligned}\text{微分形式: } \nabla \cdot \mathbf{J}_c &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \text{积分形式: } \oint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} &= -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV\end{aligned}$$

14. 介质中的三个物态方程为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$$

15. \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{J} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 五个场量的边界条件分别为

$$\begin{aligned}n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \sigma_s, & n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, & n \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) &= -\partial \sigma_s / \partial t \\ n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0, & n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s\end{aligned}$$

16. 特殊介质的边界条件如下。

(1) 两种理想介质的分界面上的边界条件

$$\begin{aligned}D_{1n} - D_{2n} &= \sigma_s, & E_{1t} &= E_{2t} \\ B_{1n} &= B_{2n}, & H_{1t} &= H_{2t}, & J_{1n} &= J_{2n} = 0\end{aligned}$$

(2) 理想介质和理想导体的分界面上的边界条件

$$\begin{aligned}n \times \mathbf{H}_1 &= \mathbf{J}_s, & H_{1t} &= J_s \\ n \times \mathbf{E}_1 &= 0, & E_{1t} &= E_{2t} = 0 \\ n \times \mathbf{B}_1 &= 0, & B_{1n} &= B_{2n} = 0 \\ n \times \mathbf{D}_1 &= \sigma_s, & D_{1n} &= \sigma_s\end{aligned}$$

(3) 静态电磁场的边界条件

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s, \quad n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_s$$

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t}, & \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ B_{1n} &= B_{2n}, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \\ H_{1t} &= H_{2t}, & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \end{aligned}$$

习 题 3

3.1 已知铜导线的直径为 1 mm, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, 电导率 $\gamma = 5.8 \times 10^7$ S/m。当导线中电流为 $I = 2 \cos(2\pi \times 50t)$ (A) 时, 导线中的位移电流密度为多少?

3.2 有一典型金属导体, 电导率 $\gamma = 5 \times 10^7$ S/m, $\varepsilon = \varepsilon_0$, 电流密度为 $\mathbf{J} = 10^6 \sin[117.1(3.22t - z)]\mathbf{e}_x$ (A/m²), 求位移电流密度。

3.3 材料的 $\varepsilon_r = 1.5$, $\mu_r = 1$, 令 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 60 \cos 10^5 t$ (V/m), 试求: (1) 传导电流密度 \mathbf{J}_c ; (2) 位移电流密度 \mathbf{J}_d ; (3) 位移电流与传导电流密度振幅相等时电导率 γ 应为多大?

3.4 用圆柱坐标系, 分别位于 $r_1 = 5$ mm, $r_2 = 20$ mm, $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 50$ mm 处的理想导体表面构成的封闭区域中, 介质参数为 $\varepsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$ 和 $\gamma = 0$, 已知该区域中的磁场 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi (2/r) \cos(2\pi z) \cos(4\pi \times 10^8 t)$ (A/m), 求: (1) 封闭区域内的电场 \mathbf{E} ; (2) $r = 5$ mm, $z = 25$ mm 的表面电流密度 \mathbf{J}_s ; (3) $r = 20$ mm, $z = 25$ mm 处的表面电荷密度 σ_s ; (4) $r = 10$ mm, $z = 25$ mm 处的位移电流密度 \mathbf{J}_d 。

3.5 潮湿土壤的电导率 $\gamma = 10^{-3}$ S/m, $\varepsilon_r = 2.5$, 电场强度 $\mathbf{E} = 6 \times 10^{-6} \sin(9 \times 10^9 t) \mathbf{e}_y$ (V/m), 求传导电流和位移电流密度。

3.6 电场 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos \omega t$ (V/m), $\omega = 1000$ rad/s, 计算下列情况下的传导电流密度和位移电流密度振幅之比: (1) 在铜导体内, $\gamma = 5 \times 10^7$ S/m, $\varepsilon_r = 1$; (2) 在蒸馏水中, $\gamma = 2 \times 10^{-4}$ S/m, $\varepsilon_r = 80$; (3) 在聚苯乙烯中, $\gamma = 10^{-6}$ S/m, $\varepsilon_r = 2.53$ 。

3.7 在介质 $\gamma = 0$, $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ 和 $\mu = 5\mu_0$ 中, 位移电流密度为 $2 \cos(\omega t - 5x)\mathbf{e}_z$ ($\mu\text{A}/\text{m}^2$)。 (1) 根据位移电流的定义求 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} ; (2) 用法拉第定律的微分形式和对时间积分求 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} ; (3) 利用安培环路定律的微分形式求位移电流密度 \mathbf{J}_d , 并求 ω 。

3.8 在时变电磁场中的导体内部, 设 $t = 0$ 时分布有电荷密度为 ρ_0 的电荷。

(1) 证明电荷随时间的变化规律为 $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$, 式中 $\tau = \varepsilon/\gamma$ (s) 为电荷密度减小到初始值的 $1/e$ 时所经历的时间, 也称为弛豫时间;

(2) 分别计算铜 [$\gamma = 5.7 \times 10^7$ s/m, $\varepsilon_r = 1$] 和石墨 [$\gamma = 0.12$ s/m, $\varepsilon_r = 5$] 的弛豫时间。

3.9 如果 $\gamma = 0$, $\varepsilon = 2.5\varepsilon_0$, $\mu = 10\mu_0$, 下面的哪组场满足麦克斯韦方程组?

(1) $\mathbf{E} = 2y\mathbf{e}_y$, $\mathbf{H} = 5x\mathbf{e}_x$ 。

(2) $\mathbf{E} = 100 \sin(6 \times 10^7 t) \sin z \mathbf{e}_y$, $\mathbf{H} = -0.1328 \cos(6 \times 10^7 t) \cos z \mathbf{e}_x$ 。

(3) $\mathbf{D} = (z + 6 \times 10^7 t) \mathbf{e}_x$, $\mathbf{B} = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t) \mathbf{e}_y$ 。

3.10 海水的 $\gamma = 4$ s/m, 在 $f = 1$ GHz 时的 $\varepsilon_r = 81$, 如果把海水视为一种等效的电介质, 写出 \mathbf{H} 的微分方程。对于良导体, 例如铜 $\gamma = 5.7 \times 10^7$ s/m, $\varepsilon_r = 1$, 试比较在 $f = 1$ GHz 时的位移电流和传导电流的幅值, 并写出 \mathbf{H} 的微分方程。

3.11 由圆形极板构成的平行板电容器, 极板面积为 S , 板间距为 d , 其中充满介电常数为 ε 的电介质。当两极板间外加低频电压 $u = U_m \sin \omega t$ 时, 可不考虑变化磁场对电场的影响。若忽略边缘效应, (1) 求两极板间的位移电流 I_d ; (2) 证明 I_d 等于电容器引线中的传导电流。

3.12 一点电荷 $q = 10^{-5}$ C, 以角速度 $\omega = 10^3$ rad/s 作圆周运动, 圆周半径 $r_0 = 1$ cm, 求圆心处的位移电

流密度。

3.13 分别用下列两个场量表达线性、各向同性介质中的麦克斯韦方程。

(1) \mathbf{E} 和 \mathbf{H} ; (2) \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 。

3.14 已知在介电常数为 ϵ 、磁导率为 μ 、电导率为 0 的各向同性的均匀介质中，其中电流密度为 \mathbf{J} ，电荷密度为 ρ ，试证明：电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} 满足非齐次波动方程：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho\end{aligned}$$

3.15 试证明：在介电常数为 $\epsilon(r)$ 、磁导率为 μ_0 、电导率为 0 的非均匀无源介质 ($\mathbf{J} = 0$ 、 $\rho = 0$) 中，电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} 满足波动方程：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon(r) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\frac{\nabla \epsilon(r)}{\epsilon(r)} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon(r) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\nabla \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon(r)}{\epsilon(r)} \right]\end{aligned}$$

3.16 写出在空气和 $\mu = \infty$ 的理想磁介质之间的分界面上的边界条件。

3.17 写出推导纯导体 ($\gamma = \infty$) 表面边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s$ 的详细步骤。

3.18 在由理想导电壁 ($\gamma = \infty$) 限定的区域 $0 \leq x \leq a$ 内存在一个如下的电磁场：

$$\begin{aligned}E_y &= H_0 \mu \omega \left(\frac{a}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t) \\ H_x &= H_0 k \left(\frac{a}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t) \\ H_z &= H_0 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(kz - \omega t)\end{aligned}$$

这个电磁场满足的边界条件如何？导电壁上的电流密度的值如何？

3.19 证明：在均匀电介质内部，极化电荷体密度 ρ_p 总是等于自由电荷密度 ρ 的 $\epsilon_0/\epsilon - 1$ 倍。

3.20 证明：在均匀磁介质内部，在稳定情况下磁化电流 \mathbf{J}_m 总是等于传导电流 \mathbf{J}_c 的 $\mu/\mu_0 - 1$ 倍。

3.21 在无损耗的各向同性介质中， \mathbf{E} 的波动方程为 $\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0$ ，试问：在满足什么条件下， $\mathbf{E} = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 是波动方程的解，此电场作为麦克斯韦方程组的解的条件是什么？

3.22 在一个无源电介质中，已知电场 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_m \cos(\omega t - \beta z)$ (V/m)，试问：在什么条件下 \mathbf{E} 才能够存在？其他场量如何？

第 4 章 矢量位与标量位

在第 2 章中描述过电位和磁位的概念，相对于电场与磁场的研究来说，有时先去研究一个位函数可能会容易很多。在一定条件下，电磁场可以用位函数来表示，当然这个位函数也一定是与场有关的，比如对这个位函数进行微分即可得到场。下面将要再来讨论这种适合于电场和磁场的位函数，并利用麦克斯韦方程，推导出位函数的方程——达朗贝尔方程，最后还要引入滞后位的概念。本章所得到的结果将成为我们分析电场和磁场时的基本方法。

4.1 矢量位 \mathbf{A}

根据第 2 章中的推导，从麦克斯韦第三方程出发，即

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.1)$$

已知“任意矢量的旋度的散度恒等于零”，即对于任意矢量 \mathbf{A} ，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (4.2)$$

因为矢量 $\nabla \times \mathbf{A}$ 分别垂直于 ∇ 和 \mathbf{A} ，所以用 ∇ 点乘它必为零。如果用 $\nabla \times \mathbf{A}$ 代替式 (4.1) 中的 \mathbf{B} ，即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.3)$$

则由式 (4.1) 有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (4.4)$$

因为 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，而 $\nabla \times$ 是一个微分算子，所以 \mathbf{A} 是关于 \mathbf{B} 的位函数。

尽管很容易就找到了与磁场相关的矢量位 \mathbf{A} ，但到目前为止，它却是一个无任何约束的任意矢量，稍后再来介绍对 \mathbf{A} 的一些约束。

4.2 标量位 ϕ

考虑麦克斯韦第二方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (4.5)$$

如果用 $\nabla \times \mathbf{A}$ 代替 \mathbf{B} ，则式 (4.5) 变为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (4.6)$$

假定 \mathbf{A} 关于空间和时间的微分与顺序无关，那么其微分的顺序可以交换，则式 (4.6) 可写为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

则有

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$$

更一般地，如果 $\mathbf{\Omega}$ 是一个矢量函数并且 $\nabla \times \mathbf{\Omega} = 0$ ，则可以定义

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \quad (4.7)$$

保证 $\nabla \times \mathbf{\Omega} = 0$ 的唯一方法是根据式(2.15)的结论令 $\mathbf{\Omega} = -\nabla \phi$ ，因为梯度的旋度恒等于零。其中 ϕ 是一个标量位函数，由于 $\nabla \phi$ 与 ∇ 是相平行的矢量，所以它们的叉乘必定为零，则式(4.7)可以写成

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (4.8)$$

式中， ϕ 是一个尚无任何约束的标量函数。

在非时变(静态)情况下 $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ ，式(4.8)变为

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (4.9)$$

于是对 ϕ 进行微分即可得到 \mathbf{E} ，这时的 ϕ 就是在第2章中描述过的电位。

4.3 用位函数 ϕ 和 \mathbf{A} 表示的非均匀波动方程

根据4.2节的推导，可将两个位函数 \mathbf{A} 和 ϕ 描述如下：

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{cases} \quad (4.10)$$

这些结果是从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 这两个方程中得出的。将式(4.10)的结果代入麦克斯韦第四方程，即由

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.11)$$

$$\text{变为} \quad c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \quad (4.12)$$

左边根据矢量三重积的恒等式展开，可得

$$c^2 [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\text{移项后得} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{J}}{c^2 \epsilon_0} + \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \quad (4.13)$$

显然，式(4.13)中有类似于物理学中所定义的波动方程的部分，比如

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.14)$$

只是在式(4.13)的右边多了与 \mathbf{J} 有关的一项及 $(1/c^2) \partial \phi / \partial t$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 项。

前面曾经定义了 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，但却未对 \mathbf{A} 做出任何约束，即 \mathbf{A} 可以是任意矢量。同理，上述的 ϕ 也可以是任意的标量，也就是说，可以自由地选择它们。因此，在式(4.13)中选定

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.15)$$

这时，式(4.13)将变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{J}}{c^2 \epsilon_0} \quad (4.16)$$

显然,这是一个关于 \mathbf{A} 的三维波动方程,这个方程也称为达朗贝尔方程,方程右边与 \mathbf{J} 有关的项为 \mathbf{A} 的场源。

式(4.16)中的 \mathbf{A} 是一个三维矢量, \mathbf{A} 中的每一个分量都可以分别写成类似于式(4.14)的形式,只不过在方程的右边将会有与电流密度 \mathbf{J} 的分量相对应的一项场源。因为光速 $c=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, 所以式(4.15)定义的条件可写成

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (4.17)$$

我们称这个条件为洛伦兹条件或洛伦兹规范,它是目前对于 \mathbf{A} 和 ϕ 所采用的约束。除此之外,还有在第2章中提到的一种称为库仑规范的条件,即令

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$$

这时 \mathbf{A} 和 ϕ 所满足的微分方程又将是另一种形式,详见例4.1的推导。

再将式(4.8)的结果代入到麦克斯韦第一方程中去,即由

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0$$

可得

$$\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi\right)=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

或写成

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\phi=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

因为已经选择了洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

代入上式有

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.18)$$

显然,这是一个关于 ϕ 的波动方程,它也是一个达朗贝尔方程,方程右边与电荷密度 ρ 有关的项为 ϕ 的场源。

现在得到了两个与场源 ρ 和 \mathbf{J} 相关的分别用位函数 ϕ 和 \mathbf{A} 描述的方程,即达朗贝尔方程式(4.16)和式(4.18),这两个方程都是在选择了洛伦兹规范后从麦克斯韦方程演变过来的。接下来的任务就是要在给定电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{J} 的情况下求解这两个方程,以得出标量电位 ϕ 和矢量磁位 \mathbf{A} ,然后再由 ϕ 和 \mathbf{A} 得出电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 。

例 4.1 在应用电位 ϕ 与磁位 \mathbf{A} 时,如果不采用洛伦兹条件,而采用所谓的库仑规范,即令 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, 试导出 \mathbf{A} 和 ϕ 所满足的微分方程。

解: 将 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi$ 代入麦克斯韦第四方程

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

得

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi\right)$$

左边根据矢量三重积的恒等式展开,可得

$$c^2[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}]=\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

采用库仑规范 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ ，代入上式，得

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (1)$$

又知

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

即

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

采用库仑规范 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ ，代入上式，得

$$\nabla^2\phi=-\rho/\varepsilon_0 \quad (2)$$

式(1)和式(2)即为采用库仑规范后， \mathbf{A} 和 ϕ 所满足的微分方程。

例 4.2 证明在无源空间($\mathbf{J}=0, \rho=0$)中，可以引入一个矢量位 \mathbf{A}_m 和标量位 ϕ_m ，其定义为 $\mathbf{D}=-\nabla\times\mathbf{A}_m$ ， $\mathbf{H}=-\nabla\phi_m-\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t}$ ，并推导 \mathbf{A}_m 和 ϕ_m 所满足的微分方程。

证明：在无源空间中，麦克斯韦方程为

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0 \quad (1)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0 \quad (3)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\partial\mathbf{D}/\partial t \quad (4)$$

由于 \mathbf{D} 的散度为零，而旋度的散度恒等于零，所以可令

$$\mathbf{D}=-\nabla\times\mathbf{A}_m \quad (5)$$

或写成

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi_m-\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t} \quad (6)$$

将式(5)代入式(4)，可得

$$\nabla\times\mathbf{H}=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t}$$

即

$$\nabla\times\left(\mathbf{H}+\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t}\right)=0$$

而无旋矢量可以用一个标量函数的梯度来代替，于是可令

$$\mathbf{H}+\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t}=-\nabla\phi_m$$

即

$$\mathbf{H}=-\nabla\phi_m-\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t} \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入式(2)，得

$$-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}_m)/\varepsilon=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi_m-\frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t}\right)$$

$$\text{即} \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_m) - \nabla^2 \mathbf{A}_m = -\mu\varepsilon \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} \quad (8)$$

又将式(7)代入式(3), 得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(-\nabla \phi_m - \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{即} \quad \nabla^2 \phi_m + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}_m) = 0 \quad (9)$$

令

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_m = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi_m}{\partial t}$$

将其代入式(8)和式(9)后, 可得

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \phi_m - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial t^2} = 0$$

4.4 利用场源 ρ 和 \mathbf{J} 求解位函数 ϕ 和 \mathbf{A}

前面推出的关于 ϕ 和 \mathbf{A} 的非均匀波动方程是非常相似的, 式(4.16)中关于 \mathbf{A} 的每一个分量(标量)所列出的方程与式(4.18)中关于 ϕ 的方程非常相像, 这意味着关于 ϕ 和 \mathbf{A} 的方程的解是相似的。事实上, 如果根据 ρ 求出了 ϕ 的解, 则可对应地写出根据 \mathbf{J} 所得到的 \mathbf{A} 的解。

可以直接求解方程式(4.17)中的 ϕ , 但其过程过于麻烦。简便的方法是从一个静态点电荷出发, 在距离 R 处的场点上先来构成一个式(4.19)描述的电场的解[参见式(2.2)], 如图4.1所示。

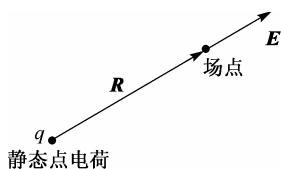


图 4.1 静态点电荷的电场

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \quad (4.19)$$

标量位 ϕ 已被定义为: 在静电场中 $-\nabla\phi$ 给定了电场 \mathbf{E} 。对于一个点电荷来说, 存在着球形对称场(该场仅仅取决于电荷到场点的距离 R), 在这种情况下对于 $\nabla\phi$ 的描述可采用球形极坐标(参见附录 A), 即

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial R} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

对于静态点电荷来说, 则有

$$\phi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (4.20)$$

可以根据叠加原理(全体电荷所形成的场等于每一个电荷单独形成的场的总和)将式(4.20)中的点电荷表示成为在体积 V 中的电荷分布 ρ , 即有

$$\phi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dV \quad (4.21)$$

在计算空间电荷分布时, 需要引入另一个矢量来描述与 ρ 有关的空间变量。假设这个矢

量为 $\rho(\mathbf{r}_p)$, 其中 \mathbf{r}_p 是从参考点(原点)指向 V 中一点的矢量, 同时可将 ϕ 写成 $\phi(\mathbf{r})$, 其中 \mathbf{r} 是从原点指向场点的矢量, 如图4.2所示。

一般情况下, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p$, 则

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_p)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} dV \quad (4.22)$$

这样就得到了静态场中的解, 将这个结果扩展到运动电荷的分布场中, 则 ϕ 和 ρ 为时间和位置的函数。由于 ρ 和 ϕ 不是在空间的同一个点上, 并且由于电磁场是以一个极限速度(在真空中为光速 c) 在扰动传播, 所以点 \mathbf{r} 处 t 时刻的场并不是由 t 时刻的源产生的, 而是由在此之前的 t' 时刻的源所产生的, 如图4.3所示。

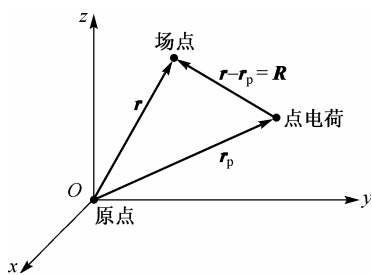


图 4.2 用矢量描述空间变量

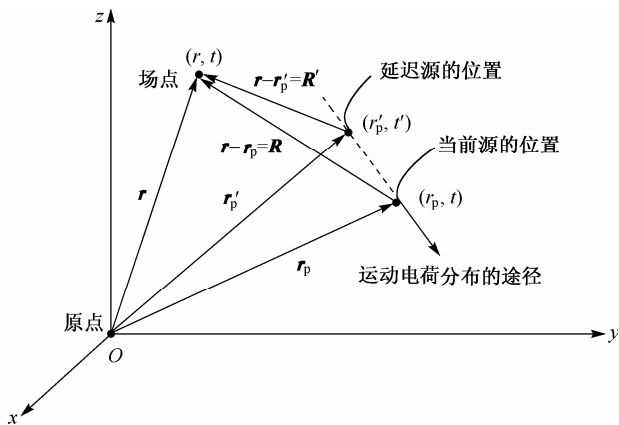


图 4.3 运动电荷的场的分布

当然 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 与 $\rho(\mathbf{r}'_p, t')$ 相关, 其中 t' 是延迟时间, \mathbf{r}'_p 是在 t' 时刻电荷的位置。从延迟的源点 \mathbf{r}'_p 到场点 \mathbf{r} 的距离段内场的速度为 c , 所以场从源点传播到场点所经历的时间是 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c$, 其时间延迟为

$$t - t' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c$$

因此

$$t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c \quad (4.23)$$

那么移动电荷的分布所产生的电位为

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}'_p, t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|} dV'$$

或者写成

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}'_p, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|} dV' \quad (4.24)$$

式中, \mathbf{r}'_p 是延迟源的位置; t' 是延迟时间, 积分是在延迟体积 V' 上进行的。这里所构造的解给出了位函数 ϕ 和电荷密度 ρ 之间的一般关系, 根据式(2.37)可以写出对应的 \mathbf{A} 的表达式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}'_p, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|} dV' \quad (4.25)$$

式中, 电流密度 \mathbf{J} 是在延迟位置 (\mathbf{r}'_p, t') 时的值, 积分是在延迟体积 V' 上进行的。在 ϕ 和 ρ 的表达式中, 时间延迟量 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c$ 随着 \mathbf{r}'_p 的变化而改变, 它取决于电荷或电流密度所在的点。换句话说, 体积 V 中的不同部分所延迟的量不同。因此对于点电荷来说, 当它正在移动时, 延迟量在不断变化给分析所带来的困难将无法回避。一开始对于这样的分析可能会觉得难以进行, 但是对于点电荷所得到的分析结果(如果结果是正确的)必定是与按照电荷分布取极限 ($V \rightarrow 0$) 后所得到的点电荷的分析结果是一致的。

上面的分析说明, 在时刻 t , 空间某点所观察到的矢量位 \mathbf{A} 和标量位 ϕ , 是由 $(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c)$ 时刻的电流或电荷产生的, 也就是说, 在空间某点并不会立刻感受到波源的影响, 而是要滞后一段时间 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c$, 这个滞后效应是由于电磁波的速度为有限值而引起的, 于是又可将随时间变化的位函数 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 称为动态位或滞后位。

例 4.3 试证明, 在无源空间 ($\rho = 0$) 滞后位 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 满足齐次达朗贝尔方程。

证明: 已知在无源空间 ($\rho = 0$), 标量位函数 ϕ 满足齐次达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

式中, $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。当 ϕ 只与 r 和 t 有关时, 在球坐标下, 齐次达朗贝尔方程为

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} = 0$$

上式是关于 $r\phi$ 的一维波动方程, 其解的形式为

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

现在先证明 $\phi(r, t) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 满足齐次达朗贝尔方程。因为

$$\frac{\partial(r\phi)}{\partial r} = f_1'\left(t - \frac{r}{v}\right)\left(-\frac{1}{v}\right), \quad \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} f_1''\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

$$\text{而} \quad \frac{\partial(r\phi)}{\partial t} = f_1'\left(t - \frac{r}{v}\right), \quad \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} = f_1''\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

$$\text{故有} \quad \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}$$

同理, 对于反射波 $f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$ 也可同样证明。

4.5 李纳-维谢尔位函数

运动的点电荷存在着标量位和矢量位, 在对这些位函数进行有效的计算时必须用电荷分布的极限值(体积趋近于零)来代替点电荷。余下的基本问题就是对式(4.24)和式(4.25)求积分以得出 ϕ 和 \mathbf{A} 。计算积分所面临的困难是这些积分都与延迟体积 V' 和在 t 时刻的当前体积 V 有关, 每一个延迟体积 V' 的体积元 dV' (在 t' 时刻及位置 \mathbf{r}'_p 处) 都与相对应的运动电荷或电流分布的当前体积 V 的体积元 dV 有关, 如图4.4所示。

可以利用雅可比行列式 g 将体积元 dV' 和 dV 的关系进行对应的转换, 即 $dV = g dV'$, 其中的雅可比行列式为

$$g = \frac{\partial(x_p, y_p, z_p)}{\partial(x'_p, y'_p, z'_p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial x'_p} & \frac{\partial y_p}{\partial x'_p} & \frac{\partial z_p}{\partial x'_p} \\ \frac{\partial x_p}{\partial y'_p} & \frac{\partial y_p}{\partial y'_p} & \frac{\partial z_p}{\partial y'_p} \\ \frac{\partial x_p}{\partial z'_p} & \frac{\partial y_p}{\partial z'_p} & \frac{\partial z_p}{\partial z'_p} \end{vmatrix}$$

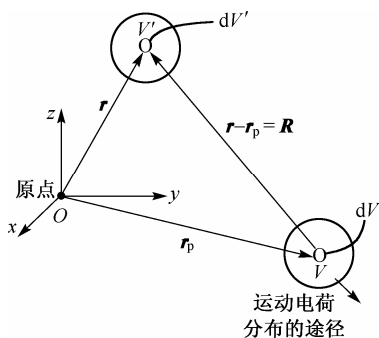


图 4.4 与体积元有关的运动电荷或电流的分布

现在的任务是要得到行列式中的微分, 为此需要建立两个体积之间的关系。在运动电荷分布的情况下, 假定电荷分布在延迟体积和当前体积中都是一样的, 即

$$\rho(\mathbf{r}_p, t) = \rho(\mathbf{r}'_p, t') \quad (4.26)$$

延迟时间和当前时间的关系为

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|}{c}$$

假定用矢量 \mathbf{R} 将延迟体积元和当前体积元联系在一起, 即

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p \quad (4.27)$$

这个矢量与时间的差值 $t - t'$ 有关。对于 $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p$ 中的 x 分量, 有

$$x_p - x'_p = f(t - t') \quad (4.28)$$

将函数 $f(t - t')$ 展开成泰勒级数:

$$f(t - t') = a_0 + a_1(t - t') + a_2(t - t')^2 + \dots$$

幂级数中的各项系数与函数值及 $t = t'$ 时的导数有关, 即

$$a_0 = f(t - t') \Big|_{t=t'} = f(0)$$

$$a_1 = \frac{\partial}{\partial t} f(t - t') \Big|_{t=t'} = f'(0)$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t - t') \Big|_{t=t'} = f''(0)$$

更一般地,

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t - t') \Big|_{t=t'} = f^{(n)}(0)$$

于是

$$x_p - x'_p = a_0 + a_1(t - t') + a_2(t - t')^2 + \dots + a_n(t - t')^n \quad (4.29)$$

因为当 $t = t'$ 时 $x_p = x'_p$, 所以函数 $[x_p(t) - x'_p(t')]$ 在 $t = t'$ 时的值为零, 并且级数中的第一项也是零。级数中第二项的系数是一个对时间 t 求导的函数在 $t = t'$ 时的值, 但是

$$\frac{\partial}{\partial t} [x_p(t) - x'_p(t')] = \frac{\partial x_p}{\partial t}$$

显然, 这个导数是电荷分布速度 v 的 x 分量, 即

$$v_x(t') = f'(0)$$

$[x_p(t) - x'_p(t')]$ 的二阶微分则是速度的 x 分量的导数, 即

$$\dot{v}_x(t') = f''(0)$$

则幂级数可写成

$$x_p - x'_p = v_x(t')(t-t') + \dot{v}_x(t')(t-t')^2/2 + \ddot{v}_x(t')(t-t')^3/3! + \dots \quad (4.30)$$

由这个表达式可得出雅可比行列式中的一些项。

类似地, 有

$$y_p - y'_p = v_y(t')(t-t') + \dot{v}_y(t')(t-t')^2/2 + \ddot{v}_y(t')(t-t')^3/3! + \dots \quad (4.31)$$

和

$$z_p - z'_p = v_z(t')(t-t') + \dot{v}_z(t')(t-t')^2/2 + \ddot{v}_z(t')(t-t')^3/3! + \dots \quad (4.32)$$

对式(4.30)中 x'_p 进行微分, 并注意速度项是延迟位置坐标的函数, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_p}{\partial x'_p} - 1 = & -v_x(t') \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) + \dot{v}_x(t') \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) (t-t') - \\ & \dot{v}_x(t') \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) (t-t') + \frac{\ddot{v}_x(t')(t-t')^2}{2!} \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) - \\ & \frac{\ddot{v}_x(t')(t-t')^2}{2!} \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) + \frac{\ddot{v}_x(t')(t-t')^3}{3!} \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.33)$$

式中除了第一项之外, 其余的项都可消掉, 则

$$\frac{\partial x_p}{\partial x'_p} - 1 = -v_x(t') \left(\frac{\partial t'}{\partial x'_p} \right) \quad (4.34)$$

类似地, 对式(4.30)中 y'_p 进行微分, 有

$$\frac{\partial x_p}{\partial y'_p} - 1 = -v_x(t') \left(\frac{\partial t'}{\partial y'_p} \right) \quad (4.35)$$

对式(4.30)中 z'_p 进行微分, 有

$$\frac{\partial x_p}{\partial z'_p} - 1 = -v_x(t') \left(\frac{\partial t'}{\partial z'_p} \right) \quad (4.36)$$

求式(4.31)和式(4.32)中 y'_p 和 z'_p 对于延迟空间坐标的微分也可得出类似的结果。其所有结果 [如式(4.34)、式(4.35)和式(4.36)] 都包含了对延迟坐标的延迟时间的微分, 其中各项的关系为

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|}{c}$$

式中, $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p = (x_p - x'_p)\mathbf{e}_x + (y_p - y'_p)\mathbf{e}_y + (z_p - z'_p)\mathbf{e}_z$, 并且

$$|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p| = \sqrt{(x_p - x'_p)^2 + (y_p - y'_p)^2 + (z_p - z'_p)^2} = R_p$$

$$\begin{aligned}\partial|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|/\partial x'_p &= -\{(x_p - x'_p)^2 + (y_p - y'_p)^2 + (z_p - z'_p)^2\}^{-1/2}(x_p - x'_p) \\ &= -(x_p - x'_p)/R_p = -n'_{px}\end{aligned}$$

式中, n'_{px} 是在 $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p$ 方向上的单位矢量的 x 分量的大小。

$$\text{因此} \quad \partial t'/\partial x'_p = n'_{px}/c$$

$$\text{同样有} \quad \partial t'/\partial y'_p = n'_{py}/c, \quad \partial t'/\partial z'_p = n'_{pz}/c$$

现在就可以得出雅可比行列式中每一项的表达式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_p}{\partial x'_p} &= 1 - \frac{v_x(t')n'_{px}}{c}, & \frac{\partial x_p}{\partial y'_p} &= -\frac{v_x(t')n'_{py}}{c}, & \frac{\partial x_p}{\partial z'_p} &= -\frac{v_x(t')n'_{pz}}{c} \\ \frac{\partial y_p}{\partial y'_p} &= 1 - \frac{v_y(t')n'_{py}}{c}, & \frac{\partial y_p}{\partial x'_p} &= -\frac{v_y(t')n'_{px}}{c}, & \frac{\partial y_p}{\partial z'_p} &= -\frac{v_y(t')n'_{pz}}{c} \\ \frac{\partial z_p}{\partial z'_p} &= 1 - \frac{v_z(t')n'_{pz}}{c}, & \frac{\partial z_p}{\partial y'_p} &= -\frac{v_z(t')n'_{py}}{c}, & \frac{\partial z_p}{\partial x'_p} &= -\frac{v_z(t')n'_{px}}{c}\end{aligned}$$

用上述各表达式替代雅可比行列式中的各对应项, 然后计算这个行列式的值(详细推导见附录B), 可得

$$g = 1 - \frac{v_x(t')n'_{px}}{c} - \frac{v_y(t')n'_{py}}{c} - \frac{v_z(t')n'_{pz}}{c}$$

$$\text{即} \quad g = 1 - \mathbf{v}(t') \cdot \frac{\mathbf{n}'_p}{c} \quad (4.37)$$

于是体积元 dV 和延迟体积元 dV' 之间的关系为

$$dV = [1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'_p/c] dV'$$

已知标量位 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 的表达式为

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}'_p, t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|} dV'$$

现在就可将这个对延迟体积 V' 的积分转换为对体积 V 的积分。为了得出点电荷的积分结果, 可令体积趋近于零, 此时 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|$ 将是积分项中的常数, 可将其设为 R' 。利用式(4.26)所给定的条件

$$\rho(\mathbf{r}_p, t) = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|$$

$$\text{可得} \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V \rightarrow 0} V \frac{\rho(\mathbf{r}'_p, t')}{R'} \cdot \frac{dV}{[1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'_p/c]}$$

$$\text{即} \quad \phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{R'[1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'_p/c]} \quad (4.38)$$

对于点电荷 q , 有 $R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|$, 并且所有的初始量都是在延迟电荷位置 (\mathbf{r}'_p, t') 进行计算的。

类似地, 可得出运动点电荷的矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \cdot \frac{q\mathbf{v}(t')}{R'[1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'_p / c]} \quad (4.39)$$

式(4.38)和式(4.39)称为相对于运动点电荷的李纳-维谢尔(Lineard-Wiechert)函数。

本章小结

1. 矢量 \mathbf{A} 是关于磁场 \mathbf{B} 的矢量位函数, 二者的关系为 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 但此时的 \mathbf{A} 为任意矢量。

2. 洛伦兹规范约束了矢量 \mathbf{A} 的行为和范围, 并描述了矢量位 \mathbf{A} 与标量位 ϕ 之间应满足的关系, 洛伦兹规范条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

3. 洛伦兹规范中的 ϕ 是关于电场 \mathbf{E} 的标量位函数, 它与电场的关系为

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

在静态电场中, $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 。

4. 在电流作为场源的激励之下, 矢量位 \mathbf{A} 所满足的三维波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{J}}{c^2 \epsilon_0}$$

在电荷作为场源的激励之下, 标量位 ϕ 所满足的三维波动方程为

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

5. 求解矢量位 \mathbf{A} 所满足的三维波动方程和标量位 ϕ 所满足的三维波动方程, 就可分别得出在各自场源激励下的矢量位 \mathbf{A} 和标量位 ϕ , 然后通过关系 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$ (或 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$), 则可求得磁场 \mathbf{B} 和电场 \mathbf{E} , 这是求解电场和磁场的一种途径和方法, 这种途径和方法往往要比直接求解磁场 \mathbf{B} 和电场 \mathbf{E} 方便且容易, 特别是对于静态场的求解。

6. 通常将时变条件下的位函数称为动态位或滞后位, 这是因为在与场源相距 r 的场点处, 时变源在 $t = t_0$ 时刻的改变将反映在 $t = t_0 + r/c$ (c 为光速) 时刻的位函数中。

7. 随时间变化的位函数 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 的动态位或滞后位为

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}'_p, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}'_p, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p|} dV'$$

8. 相对于运动点电荷的标量位和矢量位

$$\phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{R'[1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'_p / c]}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \frac{q\mathbf{v}(t')}{R'[1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'_p / c]}$$

又称为李纳-维谢尔函数。

习 题 4

4.1 给定标量位 $\phi = x - ct$ 及矢量位 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x(x/c - t)$, 其中 $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$,

(1) 证明: $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$;

(2) 求 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} ;

(3) 证明上述结果满足自由空间的麦克斯韦方程。

4.2 麦克斯韦方程中隐含了电流连续性方程, 电磁位的洛伦兹条件并不是为了保证电荷连续性而引入的。试证明: 采用库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 时, 电流连续性也是满足的。

4.3 已知矢量位 \mathbf{A} 和标量位 ϕ 分别为(圆柱坐标系)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\sin\alpha \mathbf{e}_z + \nabla \Psi, \quad \phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

其中 Ψ 为任意函数, 试求 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 。

4.4 试证明: 极化矢量 \mathbf{P} 满足连续性方程。另一方面, 如果定义一个矢量 $\boldsymbol{\xi}_e$, 且令 $\mathbf{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_e}{\partial t}$, $\phi = -\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_e$, 再证明: 矢量 $\boldsymbol{\xi}_e$ 满足洛伦兹条件。最后请导出 $\boldsymbol{\xi}_e$ 满足的微分方程 ($\boldsymbol{\xi}_e$ 称为赫兹电矢量, 可以看出 \mathbf{P} 是 $\boldsymbol{\xi}_e$ 的源)。

4.5 与赫兹电矢量相对应, 可以定义赫兹磁矢量 $\boldsymbol{\xi}_m$ 如下:

$$\mathbf{A}_m = \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_m}{\partial t}, \quad \phi_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_m$$

其中磁化矢量 \mathbf{M} 是 $\boldsymbol{\xi}_m$ 的源, 试导出 $\boldsymbol{\xi}_m$ 所满足的微分方程。

4.6 从麦克斯韦方程组出发, 导出毕奥-萨伐尔定律。

第 5 章 静态场的解

静态场是指场量不随时间变化的场。静态场包括静电场、恒定电场和恒定磁场，它们是时变电磁场的特例。分析静态场，必须从麦克斯韦方程组这个电磁场的普遍规律出发，导出静态场中的麦克斯韦方程组，即描述静态场特性的基本方程。再根据它们的特性，联合物态方程推导出位函数的泊松方程和拉普拉斯方程。绝大多数静态场问题都可归结为求泊松方程和拉普拉斯方程解的问题，通常求解这两个方程的方法有：镜像法、分离变量法和复变函数法，它们属于解析法，而在数值计算中则常用有限差分法，它是有限元理论在电磁场分析中的具体应用。

5.1 泊松方程和拉普拉斯方程

5.1.1 静态场中的麦克斯韦方程组

对于静态场，各场量只是空间坐标 (x, y, z) 的函数，并不随时间而变化，即与时间 t 无关。因此在式 (3.53) 和式 (3.54) 中，场量对时间的偏导数为零，即

$$\partial \mathbf{D} / \partial t = 0, \quad \partial \mathbf{B} / \partial t = 0, \quad \partial \rho / \partial t = 0$$

所以，静态场的麦克斯韦方程组的微分形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (5.1)$$

电流连续性方程的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.2)$$

静态场的麦克斯韦方程组的积分形式为

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \end{cases} \quad (5.3)$$

电流连续性方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.4)$$

由上述方程组可知，静态场与时变场最基本的区别在于静态场的电场和磁场是彼此独立

存在的, 即电场只由电荷产生, 磁场只由电流产生。没有变化的磁场, 也没有变化的电场。既然如此, 我们就可以分别写出静电场、恒定电场和恒定磁场的基本方程。

1. 静电场的基本方程

静电场是静止电荷或静止带电体产生的场, 由式(5.1)~式(5.4)可知, 与电荷和电场有关的方程就是静电场的方程, 其基本方程的积分形式为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.5)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q \quad (5.6)$$

式(5.5)表明, 在静电场中 \mathbf{E} 的环量为零, 做功为零; 式(5.6)是电场高斯定律, 表明静电场中电位移矢量的通量等于闭合曲面所包围的电荷 q ; 其基本方程的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.8)$$

电介质的物态方程为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (5.9)$$

式(5.7)表明, 静电场中 \mathbf{E} 的旋度为零, 即静电场中的电场不可能由旋涡源产生; 式(5.8)表明产生电场的通量源是电荷 ρ 。于是可知, 静电场是一个有源无旋场。又由前面的分析可知, 静电场是一个位场, 所以静电场可用电位函数 ϕ 来描述, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (5.10)$$

2. 恒定电场的基本方程

载有恒定电流的导体内部及其周围介质中产生的电场即为恒定电场。当导体中有电流时, 由于导体电阻的存在, 要在导体中维持恒定电流, 必须依靠外部电源提供能量。

若一闭合路径 l 经过电源, 则

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e_E$$

即电场强度 \mathbf{E} 的环量等于电源的电动势 e_E 。这时, 电源内部的恒定电场不能用标量函数的位场表示, 即电源内部的恒定电场不具备位场的性质。若闭合路径 l 不经过电源, 则与之有关的方程为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.11)$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.12)$$

这是恒定电场在无源区域的基本方程。式(5.11)表明, 不经过电源的电场强度 \mathbf{E} 的环量为零, 即表明电源外部空间的电场仍具有位场的性质。

描述恒定电场的微分形式的基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.14)$$

可见, 无源区域中的恒定电场是一个位场。式(5.14)表明恒定电场的电流线是闭合的。

导体中的物态方程为

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (5.15)$$

从以上分析可知, 恒定电场的无源区域是一个位场, 也可用一个标量函数来描述, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

3. 恒定磁场的基本方程

恒定电流的导体周围或内部不仅存在电场, 而且存在磁场, 但这个磁场不随时间变化, 是恒定磁场。假设导体中的传导电流为 I , 电流密度为 \mathbf{J} , 则其积分形式的方程为

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.16)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.17)$$

式(5.16)表明恒定磁场中磁场强度 \mathbf{H} 的环量等于闭合面所包围的电流, 式(5.17)表明磁场中磁力线是闭合的。

微分形式的方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.19)$$

式(5.18)表明电流是产生恒定磁场的旋涡源, 式(5.19)表明磁场不可能由通量源产生。

磁介质中的物态方程为

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.20)$$

由以上分析可知, 恒定磁场是一个旋涡场, 电流是这个旋涡场的源, 磁力线是闭合的。

5.1.2 泊松方程和拉普拉斯方程

1. 静电场的位函数

静电场既然是一个位场, 就可以用一个标量函数 ϕ 的梯度来表示它, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

式中, ϕ 称为电位函数。对于均匀、线性、各向同性的介质, 介电系数 ε 为常数, 即 $\nabla \varepsilon = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \varepsilon \nabla \cdot (-\nabla \phi) &= \rho \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \nabla^2 \phi = -\rho / \varepsilon \quad (5.21)$$

式(5.21)即为在有电荷分布的区域内, 或者说在有“源”的区域内, 静电场的电位函数 ϕ 所满足的方程, 我们将这种形式的方程称为泊松方程。

如果场中某处有电荷密度 $\rho = 0$, 即在无源区域, 式(5.21)变为

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.22)$$

我们将式(5.22)这种形式的方程称为拉普拉斯方程。它是在不存在电荷的区域内, 电位函数 ϕ 应满足的方程。

算子 ∇^2 为拉普拉斯算符, 由式 (1.70) ~ 式 (1.75) 可知, 该算符在不同的坐标系中有不同的表达式。

在笛卡儿坐标系中,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

在圆柱坐标系中,

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

在球坐标系中,

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

在第2章中, 曾给出了电位函数的表达式 [见式 (2.11)]:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

在均匀、各项同性介质中, 当电荷以密度 ρ 分布在体积 V 中时, 上式可改写为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{R} dV \quad (5.23)$$

该式描述了电位参考点在无穷远处的位函数, 实际上它正是泊松方程的解。

2. 恒定电场的位函数

上面讲到, 在无源区域, 恒定电场也是一个位场, 即有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。这时同样可以引入一个标量位函数 ϕ , 使得

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

根据电流连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 及物态方程 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, 并设电导率 γ 为一常数 (对应于均匀导电媒质), 则有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\gamma \mathbf{E}) = \gamma \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\gamma \nabla^2 \phi = 0$$

因为我们所讨论的是载流导体上的电流密度和电场强度, 所以导电媒质的电导率不可能为零, 于是在上式中只可能有

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.24)$$

这表明, 在无源区域, 恒定电场的位函数满足拉普拉斯方程。

3. 恒定磁场的位函数

(1) 恒定磁场的矢量位函数

由上面的分析可知, 恒定磁场是有旋场, 即 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$, 但它却是无散场, 即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 由式 (2.30) 可知, 引入一个矢量磁位 \mathbf{A} 后, 有 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 因此可由 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ 和 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 导出矢量磁位 \mathbf{A} 的泊松方程。

变量代换后有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

由亥姆霍兹定理可知, 要确定矢量磁位 \mathbf{A} , 只确定其旋度是不够的, 还必须确定其散度。为了计算方便, 我们人为规定 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 这个规定是前面引用过的库仑规范, 根据库仑规范有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (5.25)$$

式(5.25)即为矢量磁位 \mathbf{A} 满足的矢量泊松方程。在笛卡儿坐标系下, 可以将式(5.25)分解为三个标量方程:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{cases} \quad (5.26)$$

式(5.26)与式(5.21)的形式完全一样。式(5.25)中矢量磁位 \mathbf{A} 和电流密度 \mathbf{J} 是同方向的, 在没有电流的区域, $\mathbf{J} = 0$, 所以有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (5.27)$$

式(5.27)即为矢量磁位 \mathbf{A} 满足的拉普拉斯方程。它同样可以转化成标量形式, 从而得到标量形式的拉普拉斯方程。

(2) 恒定磁场的标量位函数

在没有电流分布的区域内, 恒定磁场的基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

于是, 在无源区域内, 磁场也成了无旋场, 具有位场的性质。因此, 像静电场一样, 可以引入一个标量磁位函数 ϕ_m 来描述磁场强度, 即令

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m \quad (5.28)$$

标量磁位函数 ϕ_m 的单位是安培(A), 标量磁位相等的点所组成的曲面称为等磁位面, 等磁位面方程为

$$\phi_m(x, y, z) = c \text{ (常数)}$$

等磁位面与 \mathbf{H} 处处垂直。

当媒质是均匀、线性和各项同性时, 由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 与 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

将式(5.28)代入上式, 可得

$$\nabla^2 \phi_m = 0 \quad (5.29)$$

这表明标量磁位函数也满足拉普拉斯方程。需要注意的是, 标量磁位 ϕ_m 只是在无源区才能应用, 而矢量磁位则无此限制。

以上所导出的三种静态场的基本方程表明: 静态场可以用位函数表示, 而且位函数在有源区域均满足泊松方程, 在无源区域均满足拉普拉斯方程。因此, 静态场的求解问题就变成了如何求解泊松方程和拉普拉斯方程的问题。

泊松方程和拉普拉斯方程都是二阶偏微分方程, 针对具体的电磁问题, 不可能完全用数学方法求解。在介绍具体的求解方法之前, 下面先介绍几个重要的基本原理, 这些原理将成为以后求解方程的理论依据。

5.2 对 偶 原 理

如果描述两种物理现象的方程具有相同的数学形式，并且具有相似的边界条件或对应的边界条件，那么它们的数学解的形式也将是相同的，这就是对偶原理。具有同样数学形式的两个方程称为对偶性方程，在对偶性方程中，处于同等地位的量称为对偶量。

有了对偶原理，就能把某种场的分析计算结果，直接推广到其对偶的场中，这也是求解电磁场的一种方法。

1. $\rho = 0$ 区域的静电场与电源外区域的恒定电场的对偶

在无源区域，静电场与恒定电场的场量之间存在着如表 5.1 所示的对偶关系。

表 5.1 静电场与恒定电场的对偶关系

静 电 场	恒 定 电 场	对 偶 量
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$	$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$	$\phi \leftrightarrow \phi$
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$	$\boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{J}$
$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$	$\varepsilon \leftrightarrow \gamma$
$\nabla^2 \phi = 0$	$\nabla^2 \phi = 0$	$\phi \leftrightarrow \phi$
$q = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$q \leftrightarrow I$

根据对偶性原理，如果在导电媒质中，电流密度矢量 \boldsymbol{J} 与电介质中的电位移矢量 \boldsymbol{D} 处于相同的边界情况下，即边界形状、尺寸、相互位置及场源都相等或相似，则介质中的静电场与均匀导电媒质中的恒定电场将具有相同的电场分布，即两者的等位面的分布一致，且 \boldsymbol{D} 线与 \boldsymbol{J} 线的分布也一致。由于这两种场存在对偶性，因此，通过对偶量的代换就可直接由静电场的解得到恒定电场的解。

2. $\rho = 0$ 区域的静电场与 $\boldsymbol{J} = 0$ 区域的恒定磁场的对偶

在无源区域，静电场与恒定磁场的场量之间存在着如表 5.2 所示的对偶关系。

表 5.2 静电场与恒定磁场的对偶关系

静 电 场	恒 定 磁 场	对 偶 量
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$	$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$	$\varepsilon \leftrightarrow \mu$
$q = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$q \leftrightarrow \Phi$
$\nabla^2 \phi = 0$	$\nabla^2 \phi_m = 0$	$\phi \leftrightarrow \phi_m$

在有源情况下，即 $\boldsymbol{J} \neq 0, \rho \neq 0$ 时，恒定磁场和静电场的对偶关系就不是那么明显了。对偶关系在相当一部分电磁问题中是适用的，求解时变电磁场时，它将显得更为有用，如电偶极子与磁偶极子、某些波导中的横电波 (TE 波) 与横磁波 (TM 波) 等。对偶原理除了为电磁场的分析提供一种方法，在其他很多方面也能够给我们提供分析问题的思路。

5.3 叠加原理和唯一性定理

在研究具体的工程电磁场问题时,无论是静电场、恒定电场还是恒定磁场,都需要根据实际工程中给定的边界条件,通过求解泊松方程或拉普拉斯方程,得到标量电位函数或矢量磁位函数。

5.3.1 边界条件的分类

给定位函数的边界条件通常有三类。

(1) 直接给定整个场域边界上的位函数值

$$\phi = f(s) \quad (5.30)$$

式中, $f(s)$ 为边界点 s 的位函数,这类问题称为第一类边界条件。

(2) 只给定待求位函数在边界上的法向导数值

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f(s) \quad (5.31)$$

因为 $\rho_s = D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}$, 所以式(5.31)相当于给定了边界表面的面电荷密度或电场强度的法向分量,这类问题称为第二类边界条件。

(3) 给定边界上的位函数及其法向导数的线性组合

$$\phi + f_1(s) \frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(s) \quad (5.32)$$

这是混合边界条件,称为第三类边界条件。

上述三类边值问题的求解方法基本上是相同的,在具体求解拉普拉斯方程和泊松方程之前,有必要先讨论电磁场的叠加原理和唯一性定理。

5.3.2 叠加原理

叠加原理可叙述为:若 ϕ_1 和 ϕ_2 分别满足拉普拉斯方程,即 $\nabla^2 \phi_1 = 0$ 和 $\nabla^2 \phi_2 = 0$, 则 ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合 $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$ 必然也满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2 (a\phi_1 + b\phi_2) = 0$$

式中, a 和 b 均为常数。

证明: $\nabla^2 \phi = \nabla^2 (a\phi_1 + b\phi_2) = \nabla^2 (a\phi_1) + \nabla^2 (b\phi_2) = a\nabla^2 \phi_1 + b\nabla^2 \phi_2 = 0$

因为 $\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = 0$

所以 $\nabla^2 \phi = 0$

推广: 根据叠加原理,若 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 均满足拉普拉斯方程,并且都是拉普拉斯方程的解,那么其线性组合 $C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \dots + C_n\phi_n$ 也是拉普拉斯方程的解。所以只要能够选择适当的方法,找出线性组合的常数,并使其满足给定的边界条件,就可以得到拉普拉斯方程的唯一解。利用叠加原理,可以把比较复杂的位场问题分解为简单问题的组合。

5.3.3 唯一性定理

唯一性定理可叙述为：对于任一静态场，在边界条件给定后，空间各处的场也就唯一地确定了，或者说这时拉普拉斯方程的解是唯一的。

事实上，对于时变电磁场，在给定电磁场的初始值和边值后，麦克斯韦方程组的解也是唯一的。唯一性定理是求解电磁场问题的重要的方法和理论依据，有很多方法可以进行证明它。

5.4 镜 像 法

在此之前，在分析电磁场问题时常常只考虑孤立带电体或孤立带电导线周围产生的电场与磁场，在讨论边界条件时，也只是讨论无限大的导体分界面或介质分界面的情况。但如果在电荷或带电体产生的场中放置一定形状的导体时，该导体表面上将会产生感应电荷，这时源电荷和导体之间的区域内所产生的电场将是实际电荷与感应电荷所产生的电场的叠加。一般直接计算这种合成电场是比较复杂的，但是如果导体的形状较简单，而且源电荷又是点电荷或线电荷，则可以使用镜像法来计算它的合成场。

镜像法是利用一个称为镜像电荷的与源电荷相似的点电荷或线电荷来代替或等效实际电荷所产生的感应电荷，然后通过计算由源电荷和镜像电荷共同产生的合成电场，而得到源电荷与实际的感应电荷所产生的合成电场的方法。

一般可以考虑采用标量位函数来计算这个由电荷所产生的合成电场，这样可以避免复杂的矢量运算。当然，这就需要假设镜像电荷与源电荷共同产生了一个总的电位函数，它既能满足给定的边界条件，又在一定区域内满足拉普拉斯方程。根据唯一性定理，所假设的位函数是该区域上的唯一的电位函数。因此，用镜像法求解静电场问题的关键是寻找合适的镜像电荷，然后再引出位函数并求解，这是分析很多电磁场问题的一种有效方法。

5.4.1 点电荷与无限大平面导体的合成场计算

如图5.1所示，设有一无限大平面导体，距平面 h 处有一点电荷 $+q$ ，周围介电常数为 ϵ ，如何求出介质中任一点电场的电位分布函数呢？

如图5.2所示，取笛卡儿坐标系，使 $z=0$ 的平面与导体平面重合，并将 $+q$ 电荷放在 z 轴上。这时整个电场是静电场，是由电荷 q 和导体平面上的感应电荷共同产生的。

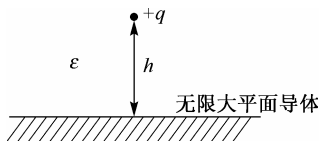


图 5.1 点电荷与导体平面

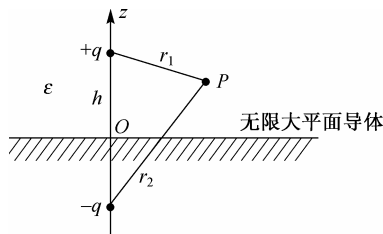


图 5.2 镜像法的应用

点电荷 q 与导体平面之间的电位必须满足下列条件：

- (1) 在 $z=0$ 处， $\phi=0$ ，因为无限大的导体平面电位为零；
- (2) 在 $z>0$ 的空间里，除了点电荷所在的点外，处处应该满足 $\nabla^2\phi=0$ 。

根据镜像法的原理,设想把无限大导电平面撤去,使整个空间充满同一种介质 ε ,并在点电荷 q 的对称位置上,放一个点电荷 $-q$ 来代替导电平面上的感应电荷。于是,在 $z>0$ 空间里任一点 $P(x,y,z)$ 的电位就应等于源电荷 $+q$ 与镜像电荷 $-q$ 所产生的电位之和。

P 点的电位为

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right)\end{aligned}\quad (5.33)$$

这个假设的电位函数是否是我们所要求的合成场呢? 必须使用上述两个条件进行验证。

由唯一性定理可知,如果 ϕ 满足边界条件和拉普拉斯方程,则式(5.33)就是我们所要求的解。

1. 由式(5.33),当 $z=0$ 时,有 $\phi=0$,条件(1)得到满足。

2. ϕ 满足拉普拉斯方程,证明如下。

当 $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ 时,在球坐标系下有

$$\nabla^2(1/r_1) = \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r_1^2 \frac{\partial(1/r_1)}{\partial r_1} \right) = 0$$

同理有

$$\nabla^2(1/r_2) = 0$$

所以上面假设的镜像电荷与源电荷产生的合成场满足

$$\nabla^2\phi = 0$$

这表明,式(5.33)所表示的 ϕ 就是所寻求的合成场的解。

这时,导体平面上的感应电荷密度为

$$\rho_s = D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

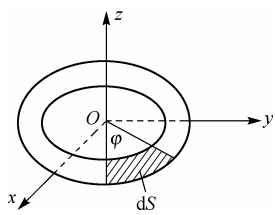


图 5.3 导体平面的微元

如图5.3所示,导体平面上总的感应电荷为

$$q_m = \int_S \rho_s dS = -\frac{qh}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\phi}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \Big|_0^\infty = -q$$

式中, $r^2 = x^2 + y^2$; $dS = r dr d\phi$ 。

推广:

1. 如图 5.4 所示,若将源点电荷换成线电荷,让线电荷的线与平面平行,由于线电荷可以看成是由无限多个连续分布的点电荷组成的,用镜像法同样可计算出在 $z>0$ 的空间一点 P 的电位为

$$\phi = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (5.34)$$

2. 如图 5.5 所示,两相交半无限大导体平面夹角为 α ,在角区内的点电荷、线电荷的场也可用镜像法求解。

由上面分析可知,导体平面好像一面镜子,镜像电荷就是源电荷的虚像。只有导体平面是无限大平面时,镜像电荷才与源电荷等值异号,并位于源电荷的像点位置上。

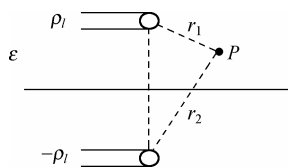


图 5.4 线电荷与导体平面产生的场

对于交角为 α 的两半平面, $\alpha = 180^\circ/n$, n 为正整数, 则其像点个数为 $2n-1$ 个。第 $2n-1$ 个镜像电荷总是与源电荷对称的。

所以, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $n = 180^\circ/90^\circ = 2$, 像点个数为 $2n-1 = 3$, 如图5.6所示。

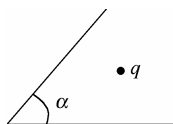


图 5.5 点电荷与两相交半无限大导体平面

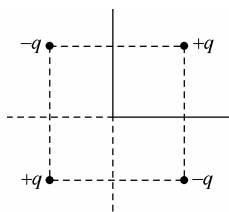


图 5.6 两相交为直角的半平面的镜像

3. 如图 5.7 所示, 无限长通电直导线在一无限大铁磁介质平面上方时, 假设线电流与平面平行, 铁磁体的磁导率 $\mu = \infty$ 、 $H_{2t} = 0$, 可推测镜像电流与线电流 I 的位置是对称的, 而且镜像电流的大小和方向与线电流是相同的, 在空间中一点 P 的磁场由电流 I 和镜像电流 I' 共同产生, 如图5.8所示。

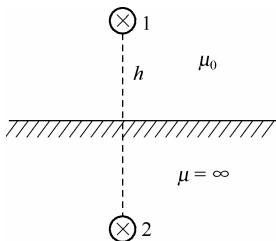


图 5.7 通电导线与磁介质平面

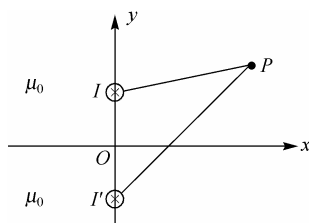


图 5.8 线电流的镜像

4. 根据镜像法的概念, 当天线架设得比较低时, 一定要考虑地面对天线性能的影响。通常把地面假设为无限大的理想导电平面, 地面的影响将归结为镜像天线所起的作用。

5.4.2 电介质分界面的镜像电荷

上面讨论的是无限大导体平面的镜像电荷。如图5.9所示, 如果分界面是介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两种无限大介质的边界平面, 在介质 1 中距分界面为 h 处置有一点电荷 q , 则介质空间中任一点 P 的电场电位分布可以用镜像法求解。

设在介质 1 和介质 2 中的介电常数分别是 ϵ_1 和 ϵ_2 , 电位函数分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 。在介质 1 中, 除 q 点处以外, 均有

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad (z \geq 0)$$

式中, ϕ_1 是点电荷 q 与介质分界面上感应束缚电荷共同产生的电位函数。

介质分界面上的感应束缚电荷在介质 1 中产生的电场可以用处于 $z < 0$ 的区域内的一个镜像电荷 q' 所产生的电场来等效, 如图5.10所示。

为了求介质 1 中的场, 将整个空间充满 ϵ_1 介质, 设在源电荷 q 对称位置上的镜像电荷为 q' , 则

$$\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1 r_2} \quad (5.35)$$

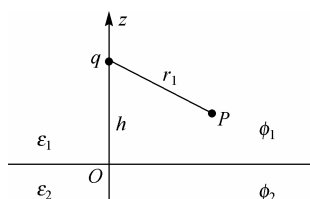


图 5.9 两种无限大介质的边界平面

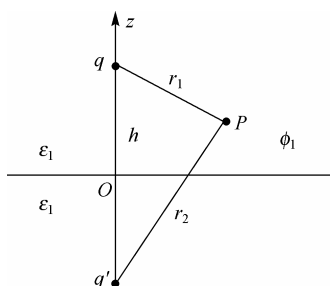


图 5.10 镜像法的应用

介质 2 中的电场是源电荷通过介质分界面上的感应束缚电荷在下半空间作用的结果, 在上半空间用一镜像电荷代替界面上的感应束缚面电荷在下半空间产生的场, 则有

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \quad (z \leq 0)$$

在介质 2 中, 场是由一个等效电荷 q'' 在原来点电荷的位置上单独产生的, 如图 5.11 所示。此时整个空间看成是充满介质常数为 ε_2 的介质, 则有

$$\phi_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r} \quad (5.36)$$

在介质分界面上, 场存在的边界条件是

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

利用电场在介质交界面上的边界条件, 可以分别确定镜像电荷 q' 和等效电荷 q'' 的大小。

如图 5.12 所示, 在介质 1 中, 界面上一点的电场强度的切向分量为

$$E_{1t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \sin \alpha + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \sin \alpha = \frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \sin \alpha$$

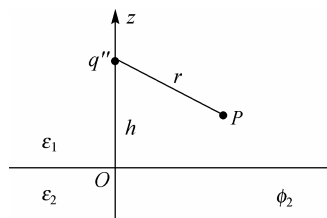


图 5.11 上半空间的镜像

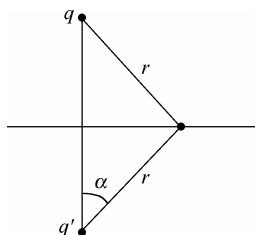


图 5.12 利用边界条件的图示

在介质 2 中, 电场是由 q'' 产生的。电场强度的切向分量为

$$E_{2t} = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \sin \alpha$$

由边界条件可得

$$\frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \sin \alpha = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \sin \alpha$$

即

$$\frac{q+q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}$$

又由 $D_{1n} = D_{2n}$, 在介质 1 中, \mathbf{D} 的法向分量为

$$D_{1n} = \frac{q}{4\pi r^2} \cos \alpha - \frac{q'}{4\pi r^2} \cos \alpha$$

在介质 2 中, \mathbf{D} 的法向分量为

$$D_{2n} = \frac{q''}{4\pi r^2} \cos \alpha$$

所以有

$$\frac{q-q'}{4\pi r^2} \cos \alpha = \frac{q''}{4\pi r^2} \cos \alpha$$

即

$$\begin{cases} \frac{q+q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2} \\ q - q' = q'' \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \\ q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \end{cases} \quad (5.37)$$

由上式可知, q'' 总与 q 同号, q' 的正负取决于两介质的介电常数。

注意:

(1) 镜像电荷不能放在要讨论的区域中, 放在被讨论的区域中时将会改变所放置区域的电位分布, 所得出的电位将不满足原来的拉普拉斯方程或泊松方程。

(2) 镜像电荷周围的介质应该是与被讨论的区间一致的。

(3) 所得电位函数必须满足原来的边界条件。

(4) 可以用类似的方法来处理两种磁介质分界面两边的磁场计算问题。

5.4.3 球形边界问题

1. 导体球接地时的边界问题

设接地导体球的半径为 a , 在球外与球心相距为 d 处有一点电荷 q , 计算球外 P 点处的电位函数。

点电荷 q 将在导体球表面产生感应负电荷, 球外任一点的电位应等于这些感应电荷与点电荷 q 产生的电位之和。

如图 5.13 所示, 设想把导体球移开, 用一个镜像电荷代替球面上的感应负电荷, 为了不改变球外的电荷分布, 镜像电荷必须放在导体球内。由于球对称性, 这个镜像电荷必然在点电荷 q 与球心所在的同一条直线上。又由于靠近点电荷 q 的球面部分感应电荷密度大些, 所以镜像电荷必定在 OM 线段上, 设在 B 点, $OB = b$ 。

则位函数的表达式为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon R_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon R_2}$$

若考虑球面上一点(如 C 点)的电位, 由于导体球接地, 则

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon r_2} = 0$$

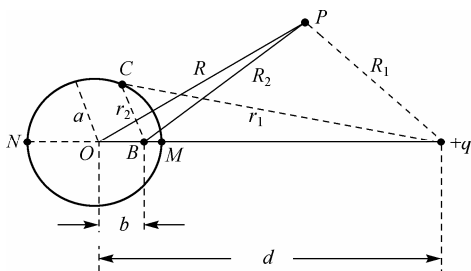


图 5.13 球形边界的镜像法

所以

$$\frac{q}{r_1} = -\frac{q'}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}$$

现在来考虑边界问题, 目的是要由已知的 d 、 a 、 q 来确定 q' 的大小。在 M 、 N 两个特殊点考虑边界, 在 M 点, 有

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a-b}{d-a} = -\frac{q'}{q}$$

同理, 在 N 点, 有

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a+b}{d+a} = -\frac{q'}{q}$$

联立上述两式可得

$$b = a^2/d$$

于是可求得

$$q' = -aq/d \quad (5.38)$$

由此可知, 镜像电荷与源电荷总是极性相反的, 确定了镜像电荷的位置和电量大小后, 位函数的表达式就确定了。采用镜像法后, 球面外区域的电位函数就容易计算了。

2. 导体球不接地时的边界问题

若导体球不接地, 导体球上的静电荷为零, 这是由电荷守恒定律决定的, 并且球面电位不为零, 但仍保持为等位面。如图 5.14 所示, 为了满足导体

球上静电荷为零的条件, 还需加入另一个镜像电荷 q'' , 使得

$$q'' = -q'$$

即

$$q' + q'' = 0$$

因为在未加入 q'' 之前, 球面已经是等位面, 所以 q'' 必须放置在球心处, 以保证加入 q'' 后球面仍为等位面。

半径为 a 的球面电位为

$$\phi_a = \frac{q''}{4\pi\epsilon a}$$

导体球外任意一点 P 的电位由 q 、 q' 和 q'' 共同产生, 即

$$\phi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r_2} + \frac{q''}{4\pi\epsilon r} \quad (5.39)$$

式中, $q' = -aq/d$; $q'' = -q'$ 。

5.4.4 圆柱形边界问题

一无限长带电线, 电荷密度为 ρ_l , 与半径为 a 的无限长导电圆柱的轴线平行, 线与圆柱轴线的距离为 d , 无限长导电圆柱等效为接地。

利用球形边界的分析方法，导电圆柱体上的镜像线电荷为

$$\rho_l' = -\rho_l$$

镜像线电荷与圆柱轴线的偏心距离为

$$b = a^2/d$$

这样，用镜像线电荷取代圆柱形导体，把问题简化为求两条平行等值异号线电荷的电位和电场。

前面曾经求过两无限长带电导线周围的电位为

$$\phi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (5.40)$$

对于两个无限长带电圆柱导体，通过镜像法可以用两个平行的线电荷代替。如图5.15所示，半径为 a 的两个导电圆柱的几何轴线相距为 D ，线电荷密度分别为 ρ_l 和 $-\rho_l$ 。镜像线电荷所在的位置称为电轴，导电圆柱1的电轴和导电圆柱2的几何轴线相距为 d ，两电轴间的距离为 $d-b$ 。由图5.15可知

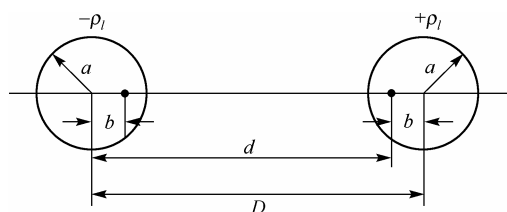


图 5.15 平行导电圆柱的电轴

$$D = d + b, \quad a^2 = bd$$

解得

$$\begin{cases} d = \frac{D}{2} + \left(\frac{D^2}{4} - a^2 \right)^{1/2} \\ b = \frac{D}{2} - \left(\frac{D^2}{4} - a^2 \right)^{1/2} \end{cases} \quad (5.41)$$

对于半径不相等的平行导电圆柱及偏心电缆，利用镜像电荷的方法，也能确定其电轴的位置。

5.5 分离变量法

分离变量法是求解拉普拉斯方程的基本方法，该方法把一个多变量的函数表示成为几个单变量函数的乘积后再进行计算。与完全的数学方法不同，针对具体物理问题使用该方法时，需要结合一些物理概念进行分析求解。

通过分离变量，将函数的偏微分方程分解为带“分离”常数的几个单变量的常微分方程。不同坐标系分解出来的单变量常微分方程的形式不同，其通解的形式也不同。坐标系的选择应尽量使场域边界面平行于坐标面。例如，矩形域应选笛卡儿坐标系，圆柱形域应选圆柱坐标系，球形域应选球坐标系。下面具体说明在笛卡儿坐标系和圆柱坐标系下的分离变量法。

5.5.1 笛卡儿坐标系中的分离变量法

如果所讨论的场域的边界面是平面，而且这些平面相互平行或相互垂直，则应选择笛卡儿坐标系。在笛卡儿坐标系中，位函数 ϕ 的拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.42)$$

令 ϕ 为三个单变量函数的乘积, 即

$$\phi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z) \quad (5.43)$$

代入式(5.42), 并在两边同除以 ϕ , 可得

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5.44)$$

上式的三项中, 每一项都是一个独立变量的函数, 而三项之和若要等于零, 则只有一个可能, 就是每一项分别等于一个常数, 并且这三个常数之和为零。可令

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -K_x^2 \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -K_y^2 \quad (5.46)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -K_z^2 \quad (5.47)$$

$$\text{且} \quad K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \quad (5.48)$$

由此可将拉普拉斯方程分解成为三个带分离常数的常微分方程。其中, K_x 、 K_y 、 K_z 是可以满足 $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$ 的任意常数。显然, 三个分离常数不可能全为实数, 也不可能全为虚数。至于将三个常数都假设为是某一个常数平方的负值, 是因为要使方程的解成为一些特殊函数, 以便于利用边界条件来确定常数。

对于式(5.45), 有如下结论:

(1) 当 $K_x^2 > 0$, 即 K_x 为实数时, 其解为

$$f(x) = A_1 \sin K_x x + A_2 \cos K_x x \quad (5.49)$$

(2) 当 $K_x^2 < 0$, 即 $K_x = ia_x$, a_x 为实数时, 其解为

$$f(x) = B_1 \text{sha}_x x + B_2 \text{cha}_x x \quad (5.50)$$

其中 $\text{sha}_x x = \frac{e^{a_x x} - e^{-a_x x}}{2}$ (双曲正弦), $\text{cha}_x x = \frac{e^{a_x x} + e^{-a_x x}}{2}$ (双曲余弦)。

(3) 当 $K_x^2 = 0$ 时, 其解为

$$f(x) = C_1 x + C_2 \quad (5.51)$$

上述几种情况中, A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 均为待定系数。

对于式(5.46)和式(5.47), 也有同样形式的解。

根据满足式(5.48)的 K_x 、 K_y 、 K_z 取值的不同组合情况, 解 $\phi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$ 的形式也有不同的组合, 需要根据具体的边界条件来确定解的组合形式和待定系数。

例 5.1 一接地金属槽的横截面如图5.16所示, 其侧壁与底面的电位均为零, 顶盖与侧壁绝缘, 其电位 $\phi = 100 \sin(\pi x/a)$, 求槽内的电位分布。

解: 由于槽内场域中没有电荷分布, 所以电位函数满足拉普拉斯方程

$$\Delta^2 \phi = 0$$

又由于场域边界为矩形, 应选用笛卡儿坐标系。根据 ϕ 与 z 无关的条件, 该问题满足二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < b)$$

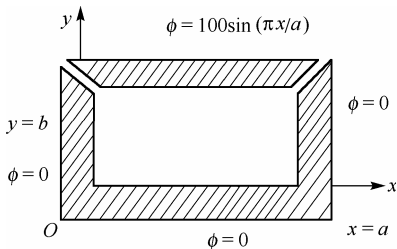


图 5.16 矩形金属槽

在笛卡儿坐标下, 位函数的边值为

$$\phi = 0, \quad x = 0 \quad 0 < y < b$$

$$\phi = 0, \quad x = a \quad 0 < y < b$$

$$\phi = 0, \quad y = 0 \quad 0 < x < a$$

$$\phi = 100 \sin(\pi x/a), \quad y = b \quad 0 < x < a$$

由于 $\phi(x, y)$ 不是 z 的函数, 故分离出的常微分方程中不会有式 (5.47) 的 z 分量, 且式 (5.48) 中 $K_z = 0$, 这时有

$$K_x^2 + K_y^2 = 0$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -K_x^2 \quad (5.52)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -K_y^2 \quad (5.53)$$

因此, K_x 、 K_y 取值的可能组合及式 (5.52)、式 (5.53) 的解的形式有如下三种情况。

(1) $K_x^2 > 0$, $K_y^2 < 0$, 式 (5.52) 的解为三角函数, 式 (5.53) 的解为双曲函数:

$$\phi = (A_1 \sin K_x x + A_2 \cos K_x x) \cdot (B_1 \sinh K_y y + B_2 \cosh K_y y)$$

(2) $K_x^2 < 0$, $K_y^2 > 0$, 式 (5.52) 的解为双曲函数, 式 (5.53) 的解为三角函数:

$$\phi = (B_1 \sinh K_x x + B_2 \cosh K_x x) \cdot (A_1 \sin K_y y + A_2 \cos K_y y)$$

(3) $K_x = K_y = 0$, 式 (5.52)、式 (5.53) 的解均为一次线性式, 即

$$\phi = (C_1 X + C_2) \times (D_1 y + D_2)$$

具体是哪种形式的解, 则要根据边界条件来进行确定。

为了满足 $x=0$ 和 $x=a$ 时 $\phi=0$, $\phi(x, y)$ 应对于 x 变量有重复零点, 使 $x=0$ 及 $x=a$ 时, $\phi(x, y)$ 都为零。这时, 方程式 (5.52) 中的 $f(x)$ 不能取双曲函数形式或一次线性式, 只能取三角函数形式, 因为只有三角函数才有两个零点, 即

$$f(x) = A_1 \sin K_x x + A_2 \cos K_x x$$

于是可知, $g(y) = (B_1 \sinh K_y y + B_2 \cosh K_y y)$, 并由此就可确定组合形式。

另外, 根据边界条件, $x=0$ 时 $\phi=0$, 此时 $A_2=0$; 又因为当 $x=a$ 时也有 $\phi=0$, 则需使 $A_1 \sin K_x x$ 满足 $x=a$ 时也有 $\phi=0$, 这时应取

$$K_x = n\pi/a \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

即

$$f(x) = A_1 \sin \frac{n\pi}{a} x$$

同样,若要 $g(y)$ 的解满足边界条件,即 $y=0$ 时 $\phi=0$, 则 $B_2=0$, 所以有 $g(y) = B_1 \operatorname{sh} a_y y$; 此外, A_y 和 K_x 应满足 $K_x^2 + K_y^2 = 0$, 即

$$K_x^2 + (ia_y)^2 = 0$$

所以有

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - a_y^2 = 0$$

由此可得

$$a_y = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

综上所述,可得

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y$$

式中系数 D_n 应由边值条件 $\phi = 100 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$ 确定, 即

$$100 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)$$

比较等号两边的函数相同项来决定 D_n 值。右边只有 $n=1$ 项系数 D_1 可以不为 0 外, 其余的各 D_n 均应为 0, 所以

$$D_1 = \frac{100}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)}$$

因此得到所求的解为

$$\phi(x, y) = \frac{100}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y$$

5.5.2 圆柱坐标系中的分离变量法

如果待求场域的分界面与圆柱坐标系中某一坐标面相一致时, 应选择圆柱坐标系。在圆柱坐标系中, 拉普拉斯方程的表达式为

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.54)$$

令待求函数为

$$\phi(r, \varphi, z) = f(r)g(\varphi)h(z) \quad (5.55)$$

将其代入式(5.54), 两边同除以 ϕ , 再同乘以 r^2 , 可得

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{g} \left(\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right) + r^2 \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (5.56)$$

式(5.56)中第二项仅与 φ 有关, 它应等于常数, 设为 $-n^2$, 即

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (5.57)$$

再将式(5.57)代入式(5.56)，两边同除以 r^2 ，得

$$\frac{1}{rf} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (5.58)$$

$$\text{令} \quad \frac{d^2 h}{dz^2} - k_z^2 h = 0 \quad (5.59)$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{rf} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(k_z^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (5.60)$$

因此便分离出式(5.58)、式(5.59)和式(5.60)三个常微分方程，它们的解的形式与 n^2 及 k_z^2 的取值有关，其可能的组合情况有如下几种。

(1) 因为 $g(\varphi)$ 一般是 φ 的周期函数，即 $g(\varphi) = g(2\pi + \varphi)$ ，因此 n 不应取分数， n^2 也不应小于零，所以式(5.57)解的形式为

$$g(\varphi) = A \sin n\varphi + B \cos n\varphi \quad (\text{当 } n^2 \geq 0 \text{ 时})$$

(2) 式(5.59)的解为

$$\text{当 } k_z^2 = 0 \text{ 时, } h(z) = A + Bz$$

$$\text{当 } k_z^2 > 0 \text{ 时, } h(z) = A \sin K_z z + B \cos K_z z$$

$$\text{当 } k_z^2 < 0 \text{ 时, } h(z) = A \sinh K_z z + B \cosh K_z z$$

(3) 式(5.60)两边同乘以 r^2 ，并展开后为

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + [(k_z r)^2 - n^2] f = 0$$

这是一个 n 阶的贝塞尔方程，它的解为

$$f(r) = A + B \ln r \quad (\text{当 } n^2 = k_z^2 = 0 \text{ 时})$$

当 $n^2 \neq 0$ ， $k_z^2 = 0$ 时，式(5.60)退化为欧拉方程，其解为

$$f(r) = Ar^n + Br^{-n}$$

当 $n^2 = 0$ ， $k_z^2 \neq 0$ 时，式(5.60)是零阶贝塞尔方程，其解为

$$f(r) = A_0 J_0(K_z r) + B_0 N_0(K_z r)$$

当 $n^2 > 0$ ， $k_z^2 > 0$ 时， $f(r) = A J_n(K_z r) + B N_n(K_z r)$

当 $n^2 > 0$ ， $k_z^2 < 0$ 时， $f(r) = A I_n(K'_z r) + B K_n(K'_z r)$

其中 $K_z'^2 = -K_z^2$ 。

以上各式中， $J_n(K_z r)$ 和 $N_n(K_z r)$ 分别是第一类及第二类贝塞尔函数， $I_n(K'_z r)$ 、 $K_n(K'_z r)$ 是虚宗量(修正)贝塞尔函数。

从上面分析可知，若 $K_z \neq 0$ ，即位函数是 z 的函数时，在圆柱坐标系下解拉普拉斯方程时，都会遇到求解贝塞尔函数的问题。

这里只研究二维问题。在圆柱体长度远大于圆柱半径的情况下，即 $z \gg r$ ，这时可以假设位函数与 z 无关，即

$$\partial^2 \phi / \partial z^2 = 0$$

于是三维方程可以变为二维方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.61)$$

令方程的解为

$$\phi(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$$

代入式(5.61)得

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.62)$$

式(5.62)中的第一项仅为半径 r 的函数, 第二项仅为方位角 φ 的函数, 欲满足两项和为零的条件, 应取

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (5.63)$$

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = n^2 \quad (5.64)$$

式中, n 为分离常数。当 $n=0$ 时, 式(5.63)和式(5.64)的解分别为

$$g_0(\varphi) = A_0 \varphi + B_0$$

$$f_0(r) = c_0 \ln r + D_0$$

当 $n \neq 0$ 时, 因为 $g(\varphi)$ 是 φ 的周期函数, 所以 n 为正整数, 式(5.63)的解为

$$g(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

而式(5.64)为欧拉方程, 可写成

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} - n^2 f = 0$$

欧拉方程的解为

$$f(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

将式(5.63)与式(5.64)的解相乘, 即可得到该电位函数的通解为

$$\phi = (A_0 \varphi + B_0)(C_0 \ln r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)(C_n r^n + D_n r^{-n})$$

上式是一个级数解, 其系数要由边界条件确定。

5.6 格林函数法

格林函数法是数学物理方法中的基本方法之一, 可以用于求解静态场中的拉普拉斯方程、泊松方程及时变场中的亥姆霍兹方程。在线性电路理论中, 为了求出线性电路对任意激励的全响应, 一般是在求得单位冲激响应的基础上, 先求出零状态响应, 然后再加上零输入响应。所谓格林函数法就是上述方法在空间域中的应用, 边值问题中的单位冲激响应函数就是格林函数。更确切地说, 格林函数是单位点源(δ 函数源)在一定的边界条件下所建立的场的位函数, 因而格林函数又称为源函数。已知电荷分布等同于已知空间电场激励源的分布, 因此只要知道点源的场, 即可用叠加原理求出任意源的场。

格林函数的解题步骤是：首先用镜像法或其他方法找到与待求问题对应的格林函数，然后将它代入由第二格林公式导出的积分公式即可得所求。一般情况下，该积分有两项：一项为零边值响应，另一项为零激励响应。

对于静电场问题，可以从单位点电荷在特定边界上产生的位函数，通过积分求得同一边界的任意分布电荷产生的电位。本节以静电场的边值问题为例，说明格林函数法在求解泊松方程中的应用。

5.6.1 静电场边值问题的格林函数法表达式

假定已知某给定区域 V 内的电荷体密度为 $\rho(r)$ ，则待求电位 $\phi(r)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi(r) = -\rho(r)/\varepsilon \quad (5.65)$$

与式 (5.65) 相对应的格林函数 $G(r, r')$ 满足下列方程：

$$\nabla^2 G(r, r') = -\delta(r, r')/\varepsilon \quad (5.66)$$

式 (5.66) 实际上就是位于源点 r' 处的单位正电荷在空间产生的电位所满足的方程，也就是说，格林函数 $G(r, r')$ 是位于源点 r' 处的单位正电荷在空间 r 处产生的电位。很显然，格林函数 $G(r, r')$ 仅仅是源点与场点间距离的函数，即是 $|r - r'|$ 的函数。将源点和场点互换，其间的距离不变，从而有

$$G(r, r') = G(r', r)$$

上式称为格林函数的对称性，也就是电磁场的互易性。将式 (5.66) 左右同乘以 ϕ ，式 (5.65) 左右同乘以 G ，二者相减再积分，可得

$$\int_V (G \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 G) dV = - \int_V G \frac{\rho}{\varepsilon} dV + \int_V \phi \frac{\delta(r, r')}{\varepsilon} dV$$

使用格林第二恒等式

$$\int_V (G \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 G) dV = \oint_S \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

$$\oint_S \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = - \int_V \frac{\rho G}{\varepsilon} dV + \int_V \phi \frac{\delta(r, r')}{\varepsilon} dV \quad (5.67)$$

当源点在区域 V 内时，有

$$\int_V \phi(r) \delta(r, r') dV = \phi(r')$$

因而，式 (5.67) 可以写成

$$\phi(r') = \int_V \rho(r) G(r, r') dV + \varepsilon \oint_S \left[G \frac{\partial \phi(r)}{\partial n} - \phi(r) \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} \right] dS$$

将上式的源点和场点互换，并且利用格林函数的对称性，得

$$\phi(r) = \int_V \rho(r') G(r', r) dV' + \varepsilon \oint_S \left[G \frac{\partial \phi(r')}{\partial n'} - \phi(r') \frac{\partial G(r', r)}{\partial n'} \right] dS' \quad (5.68)$$

式 (5.68) 就是有限区域 V 内任意一点电位的格林函数表达式。它表明，一旦体积 V 中的电荷分布 ρ 及有限体积 V 的边界面 S 上的边界条件 $\phi(r')$ 和 $\partial \phi / \partial n'$ 为已知时， V 内任意一点的电位就可以通过积分计算出来。

式(5.68)中的格林函数是在给定边界形状下的一般边值问题的格林函数,为了简化计算,可以对格林函数附加上边界条件。与静电场边值问题一样,格林函数的边界条件也分为如下三类。

1. 第一类边值问题的格林函数

与第一类静电场边值问题相对应的是第一类边值问题的格林函数,用 G_1 表示。它在体积 V 内和边界面 S 上满足的方程为

$$\nabla^2 G_1(r, r') = -\delta(r, r')/\varepsilon \quad (5.69)$$

$$G_1|_S = 0 \quad (5.70)$$

上式表明,第一类边值问题的格林函数 G_1 在边界面 S 上满足齐次边界条件。将式(5.70)代入式(5.68),可得出第一类静电场边值问题的解为

$$\phi(r) = \int_V \rho(r') G_1(r', r) dV' - \varepsilon \iint_S \phi(r') \frac{\partial G_1(r', r)}{\partial n'} dS' \quad (5.71)$$

2. 第二类边值问题的格林函数

与第二类静电场边值问题相对应的是第二类边值问题的格林函数,用 G_2 表示。它在体积 V 内和边界面 S 上满足的方程为

$$\nabla^2 G_2(r, r') = -\delta(r, r')/\varepsilon \quad (5.72)$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (5.73)$$

在此条件下,第二类静电场边值问题的解为

$$\phi(r) = \int_V \rho(r') G_2(r', r) dV' + \varepsilon \iint_S G_2 \frac{\partial \phi(r')}{\partial n'} dS' \quad (5.74)$$

3. 第三类边值问题的格林函数

对于第三类静电场边值问题,使用第三类边值问题的格林函数较为方便。第三类静电场边值问题的电位方程也由式(5.65)确定,其边界条件由下式确定:

$$\left(\alpha \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \Big|_S = f(r) \quad (5.75)$$

其中, α 、 β 为已知常数; $f(r)$ 为已知函数。与第三类静电场边值问题相应的第三类边值问题的格林函数 G_3 所满足的方程及边界条件为

$$\nabla^2 G_3(r, r') = -\delta(r, r')/\varepsilon \quad (5.76)$$

$$\left(\alpha G_3 + \beta \frac{\partial G_3}{\partial n} \right) \Big|_S = 0 \quad (5.77)$$

将式(5.77)代入式(5.68),可以简化为

$$\phi(r) = \int_V \rho(r') G(r', r) dV' + \varepsilon \iint_S \frac{f(r') G_3(r, r')}{\alpha} dS' \quad (5.78)$$

从以上推导过程可看出,格林函数解法的实质是把泊松方程的求解转化为特定边界条件

下点源激励时位函数的求解。点源激励下的位函数就是格林函数，格林函数所满足的方程及边界条件都比同类型的泊松方程要简单，这里仅仅以第三类边值问题的格林函数为例比较一下。先看式(5.65)和式(5.76)，尽管二者都是非齐次方程，它们的左边一样，但式(5.76)的右边明显简单，是一个点源激励。再比较边界条件式(5.75)和式(5.77)，可以看出，式(5.75)是一个非齐次边界条件，而式(5.77)是一个齐次边界条件。至于第一类、第二类边值问题，其格林函数也具有同样的特点。简而言之，格林函数法就是将非齐次边界条件下泊松方程的求解问题，简化为齐次边界条件下点源激励的泊松方程的求解，也就是格林函数的求解问题。而各种类型的格林函数的计算，则要利用其他的方法，比如镜像法等。

另外，如果所讨论的是拉普拉斯方程的求解问题，则仅仅需要取式(5.71)、式(5.74)和式(5.78)中的电荷体密度为零即可。

5.6.2 简单边界的格林函数

下面我们给出一些简单边界形状下第一类静电场边值问题的格林函数(为了书写简便，略去下标，用 G 表示)。

1. 无界空间的格林函数

可以用格林函数所满足的偏微分方程及边界条件，通过求解这一方程来得出格林函数，也可以由格林函数的物理含义来求解，下面使用后一种方法。

计算无界空间的格林函数，就是要计算无界空间中位于 r' 处的单位点电荷以无穷远为电位参考点时在空间 r 处的电位，这一电位为

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon |r - r'|} \quad (5.79)$$

因此，无界空间的格林函数为

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon |r - r'|} \quad (5.80)$$

式(5.80)确定的是三维无界空间的格林函数。对于二维无界空间，格林函数可以通过计算位于源点 (x', y') 处的线密度为 l 的单位无限长线电荷在空间点 (x, y) 处的电位来确定，根据静电场的知识可知，二维无界空间的格林函数为

$$G(r, r') = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln R + C \quad (5.81)$$

式中， $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ； C 是常数，取决于电位参考点的选取。

2. 上半空间的格林函数

计算上半空间($z > 0$)的格林函数，就是求位于上半空间点 r' 处的单位点电荷以 $z = 0$ 平面为电位零点时，在上半空间任意一点 r 处的电位。这个电位可以用平面镜像法求得，因而上半空间的格林函数为

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.82)$$

式中， $R_1 = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ ； $R_2 = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}$ 。

同理可得出二维半空间($y > 0$)的格林函数。使用镜像法,可以比较容易地得出位于点 (x', y') 处的单位线电荷在以 $y = 0$ 为电位参考点时在点 (x, y) 处的电位。因而,二维半空间($y > 0$)的格林函数为

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (5.83)$$

式中, $R_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$; $R_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$ 。

3. 球内、外空间的格林函数

可以由球面镜像法求出球心在坐标原点、半径为 a 的球外空间的格林函数

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{a}{r'R_2} \right) \quad (5.84)$$

式中各量如图5.17所示, a 是球的半径, R_1 是 r' 到场点 P 的距离, R_2 是 r' 的镜像点 r'' 到场点 P 的距离。

$$R_1 = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \eta}$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos \eta}$$

$$r'' = a^2/r'$$

$$\cos \eta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

同理,可以计算出球内空间的格林函数为

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{a}{r'R_2} \right) \quad (5.85)$$

式中各量如图5.18所示。

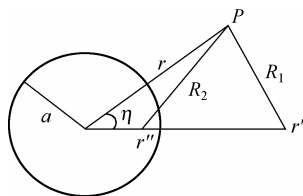


图 5.17 球外格林函数图

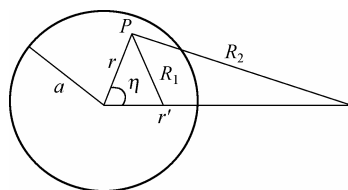


图 5.18 球内格林函数图

5.7 有限差分法

有限差分法是一种近似数值算法,属于有限元理论,在一些工程技术计算中被广泛使用。这种方法是在待求场域内选取有限个离散点,在各个离散点上以差分方程近似代替各点上的微分方程,从而把以连续变量形式表示的位函数方程转化为以离散点位函数值表示的方程组。结合具体边界条件,求解差分方程组,即得到所选的各个离散点上的位函数值。有限差分法不仅能处理线性问题,还能处理非线性问题;不仅能求解拉普拉斯方程,也能求解泊松方程;不仅能求解任意静态场的问题,也能求解时变场的问题;而且这种方法不受边界形状的限制。

函数 $f(x)$ 的一阶差分定义为

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (5.86)$$

式中, h 是自变量 x 的增量, 即 $\Delta x = h$, 将下面的式 (5.87) 称为 $f(x)$ 的一阶差商。

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5.87)$$

当 h 很小时, 差分 Δf 也很小, 因此在近似计算中可用一阶差商近似等于一阶微分, 即

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{df}{dx} \quad (5.88)$$

同样可以定义二阶差分为

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \quad (5.89)$$

二阶差商为

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta f(x+h) - \Delta f(x)}{h^2} \quad (5.90)$$

同样, 在近似计算中二阶差商近似等于二阶微商:

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta f(x+h) - \Delta f(x)}{h^2} \approx \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad (5.91)$$

事实上, 这里所描述的差分原理就是高等数学中微分定义的近似表示。差分方程就是在各离散点上, 用 $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ 和 $\frac{\Delta^2 f(y)}{\Delta y^2}$ 近似替代偏微分方程中的 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}$, 从而将拉普拉斯方程或泊松方程这样的偏微分方程化为一组代数方程, 即差分方程。

例 5.2 一个二维矩形场域 D 内, 电位函数 ϕ 满足泊松方程和第一类边界条件

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F \\ \phi|_G = f(s) \end{cases}$$

式中, F 为已知函数, 且 $F = -\rho/\varepsilon$; G 为场域 D 的边界; s 是边界 G 上的点; $f(s)$ 为已知函数。现用差分法求解上述边值问题。

解: 可将场域 D 划分为边长为 h 的正方形的网格, 如图 5.19 所示。网格线的交点为节点, 正方形的边长为 h , 称为步距, 并设节点 0 的电位值为

$$\phi(x_0, y_0) = \phi_0$$

与节点 0 相邻的四个节点 1、2、3、4 上的电位值分别为 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 、 ϕ_4 , 根据泰勒公式, 过节点 0 且平行于 x 轴的直线上任一点处的电位 ϕ_x 可表示为

$$\begin{aligned} \phi_x = \phi_0 &+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_0 (x - x_0)^3 + \\ &\frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_0 (x - x_0)^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.92)$$

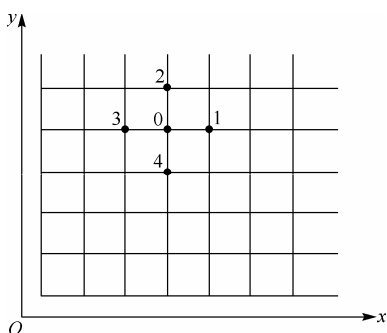


图 5.19 差分法的网格划分

对于节点 1, 即 $x = x_0 + h$, 有 $x - x_0 = h$, 所以

$$\phi_1 = \phi_0 + h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_0 + \frac{1}{4!} h^4 \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_0 + \dots \quad (5.93)$$

对于节点 3, $x = x_0 - h$, 即 $x - x_0 = -h$, 所以

$$\phi_3 = \phi_0 - h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 - \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_0 + \frac{1}{4!} h^4 \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_0 + \dots \quad (5.94)$$

用式(5.93)减去式(5.94), 当 $h \rightarrow 0$ 时, 略去 h^3 以上的高次项, 得

$$\phi_1 - \phi_3 \approx 2h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0$$

$$\text{即} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 \approx \frac{\phi_1 - \phi_3}{2h} \quad (5.95)$$

式(5.95)就是用节点 0 处的平均中心差商近似作为该点偏导数的差分表达式。

若用式(5.93)加上式(5.94), 并略去 h^4 以上更高次项后, 得

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3}{h^2} \quad (5.96)$$

同理, ϕ 在 x_0 点处对 y 的二阶偏导数也能用节点 2、4 及 0 上的电位表示为

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{\phi_2 - 2\phi_0 + \phi_4}{h^2} \quad (5.97)$$

式(5.96)和式(5.97)便是点 (x_0, y_0) 的二阶偏导数的差分表达式, 将它们代入点 (x_0, y_0) 的泊松方程

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_0 = (F)_0$$

$$\text{可得} \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = h^2 (F)_0 \quad (5.98)$$

$$\text{即} \quad \phi_0 = \frac{1}{4} [\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - h^2 (F)_0] \quad (5.99)$$

这就是节点 0 的差分方程。于是, 在节点 0 就可用一个有限差分方程近似地代替该点的泊松方程。对于拉普拉斯方程, 因为 $F = 0$, 所以在节点 0 上, 有限差分方程是

$$\phi_0 = \frac{1}{4} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (5.100)$$

式(5.99)和式(5.100)表明场域划分为正方形网格后, 场域内任一节点 0 的电位 ϕ_0 只与周围四个节点的电位有关。这两式正是最常用的节点电位差分方程的形式, 也称为等间距五点平均差分格式。对于非矩形场域, 网格划分是有限元分析与计算的关键技术之一, 是决定计算速度和精度的关键因素。计算速度是指在迭代计算时收敛的快慢, 一般可以选择适当的收敛因子加速收敛过程。

有限元的迭代计算一般是在计算机上完成的, 手工计算只是熟悉其基本过程。稍微复杂的计算需要计算机计算几百甚至几千小时以上, 于是就出现了并行计算的学科方向和并行计算机。

本章小结

1. 静电场的基本方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

这些方程表明静电场是有源无旋场，这样的场可以用电位函数描述，即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

2. 恒定电场的基本方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

这些方程表明恒定电场的无源区域也是一个位场，在无源区域，可用一个标量位函数来描述，即 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 。

3. 恒定磁场的基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

这些方程表明恒定磁场是一个旋涡场，电流是这个旋涡场的源，电流线是闭合的。由于 \mathbf{B} 的散度为零，所以可以引入矢量位函数 \mathbf{A} 。

4. 由三个静态场基本方程均可以分别推导出其位函数满足的泊松方程(有源区域)和拉普拉斯方程(无源区域)。

5. 求解静态场位函数方程的方法所依据的理论是对偶原理、叠加原理和唯一性定理。

6. 镜像法是用来计算合成场的有效方法，该方法与其他解题方法的最大不同之处是需要利用所学的物理知识和概念进行分析后再解题。镜像法是用一个与源电荷相似的点电荷或线电荷代替或等效实际导体上的感应电荷，通过计算由源电荷和这个镜像电荷共同产生的合成电场，来得出源电荷与感应电荷所共同产生的合成电场。

7. 分离变量法是把一个多变量函数表示成若干个单变量函数的乘积的分析方法。与完全的数学求解方法不同，在使用该方法求解时需要针对具体物理问题，并且结合一些物理概念进行分析。通过分离变量，将函数的偏微分方程分解为带“分离”常数的几个单变量的常微分方程。不同坐标系分解出来的单变量常微分方程的形式不同，其通解的形式也不同。

8. 格林函数法是数学物理方法中的基本方法之一，可以用于求解静态场中的拉普拉斯方程、泊松方程及时变场中的亥姆霍兹方程。格林函数法的要点是先求出与待解问题具有相同边界形状的格林函数。格林函数就是单位点源的位函数，知道格林函数后，通过积分就可以得到具有任意分布源的解。对于静电场问题，可以从单位点电荷在特定边界上产生的位函数，通过积分求得同一边界的任意分布电荷产生的电位。

9. 有限差分法是一种近似数值计算法，这种方法是在待求场域内选取有限个离散点，在各个离散点上以差分方程近似代替各点上的微分方程，从而把以连续变量形式表示的位函数方程，转化为以离散点位函数值表示的方程组。结合具体边界条件求解差分方程组，即得到所选的各个离散点上的位函数值。

习 题 5

5.1 一个点电荷 Q 与无穷大导体平面相距为 d , 如果把它移动到无穷远处, 需要做多少功?

5.2 如题 5.2 图所示, 一个点电荷放在直角导体内部, 求出所有镜像电荷的位置和大小。

5.3 证明: 一个点电荷 q 和一个带有电荷 Q 、半径为 R 的导体球之间的作用力为

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q + Rq/d}{d^2} - \frac{dRq}{(d^2 - R^2)^2} \right]$$

其中 d 是 q 到球心的距离 ($d > R$)。

5.4 两个点电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 位于一个半径为 a 的接地导体球的直径的延长线上, 分别距离球心 d 和 $-d$ 。

(1) 证明: 镜像电荷构成一电偶极子, 位于球心, 偶极矩为 $2a^3Q/d^2$ 。

(2) 令 Q 和 d 分别趋于无穷, 同时 Q/d^2 保持不变, 计算球外的电场。

5.5 如题 5.5 图所示, 接地无限大导体平板上有一个半径为 a 的半球形突起, 在点 $(0, 0, d)$ 处有一个点电荷 q , 求导体上方的电位。

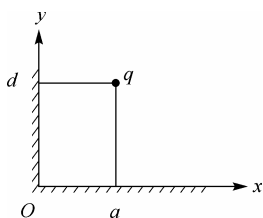
5.6 求截面为矩形的无限长区域 ($0 < x < a$, $0 < y < b$) 的电位, 其四壁的电位为

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) = \phi(x, b) = 0, \quad \phi(0, y) = 0 \\ \phi(a, y) = \begin{cases} U_0 y/b & 0 < y \leq b/2 \\ U_0(1 - y/b) & b/2 < y < b \end{cases} \end{aligned}$$

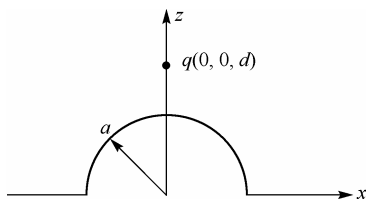
5.7 一个截面如题 5.7 图所示的长槽, 向 y 方向无限延伸, 两侧的电位是零, 槽内 $y \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$, 底部的电位为 $\phi(x, 0) = U_0$, 求槽内的电位。

5.8 若题 5.7 的底部的电位为 $\phi(x, 0) = U_0 \sin 3\pi x/a$, 重新求槽内的电位。

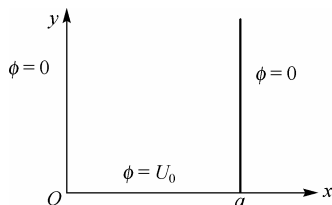
5.9 一个矩形导体槽由两部分构成, 如题 5.9 图所示, 两个导体板的电位分别是 U_0 和 0 , 求槽内的电位。



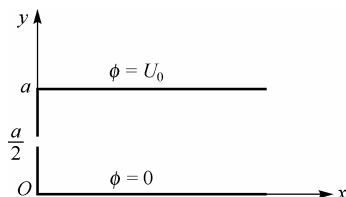
题 5.2 图



题 5.5 图



题 5.7 图



题 5.9 图

5.10 将一个半径为 a 的无限长导体管平分成两半, 两部分之间互相绝缘, 上半部分 ($0 < \phi < \pi$) 接电压 U_0 , 下半部分 ($\pi < \phi < 2\pi$) 的电位为零, 求管内的电位。

5.11 半径为无穷长的圆柱面上, 有密度为 $\rho_s = \rho_{s0} \cos \phi$ 的面电荷, 求柱面内、外的电位。

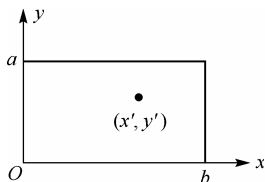
5.12 将一个半径为 a 的导体球置于均匀电场 E_0 中, 求球外的电位和电场。

5.13 将半径为 a 、介电常数为 ε 的无限长介质圆柱放置于均匀电场 E_0 中, 设 E_0 沿方向 x , 柱的轴沿 z 轴, 柱外为空气, 求任意点的电位和电场。

5.14 在均匀电场中, 放置一个半径为 a 的介质球, 若电场的方向沿 z 轴, 求介质球内、外的电位和电场(介质球的介电常数为 ε , 球外为空气)。

5.15 已知球面 ($r = a$) 上的电位为 $\phi = U_0 \cos \theta$, 求球外的电位。

5.16 求无限长矩形区域 ($0 < x < a$, $0 < y < b$) 第一类边值问题的格林函数(即矩形槽的四周电位为零, 槽内有一与槽平行的单位线源, 求槽内电位, 如题 5.16 图所示)。

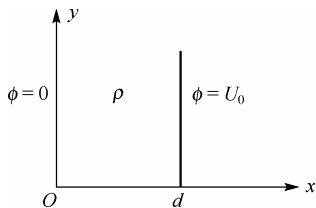


题 5.16 图

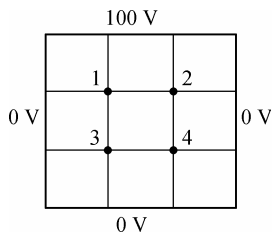
5.17 推导无限长圆柱区域内(半径为 a) 第一类边值问题的格林函数。

5.18 两个无限大导体平板间距离为 d , 其间有体密度 $\rho = \rho_0(x/d)$ 的电荷, 极板的电位如题 5.18 图所示, 用格林函数法求极板之间的电位。

5.19 用有限差分法求题 5.19 图所示区域中各个节点的电位。



题 5.18 图



题 5.19 图

第 6 章 自由空间中的电磁波

在前面章节中，对麦克斯韦方程组进行了初步的讨论。在本章中我们将要说明，由麦克斯韦方程组可以证明自由空间中存在着电波(\boldsymbol{E} 波)和磁波(\boldsymbol{B} 波)，在证明过程中会发现这些波具有十分明确的特性。通过本章的分析也将会很自然地发现，电波和磁波具有不可分割的联系。从麦克斯韦方程组还可以得知，电磁波能够在自由空间中传播，为了证明这一点，首先推导出一个关于 \boldsymbol{E} 的波动方程，然后再得出一个类似的关于 \boldsymbol{B} 的波动方程。

然而，首先要明确的是本章所说的自由空间是什么，从对本章内容的研究观点来看，这里所说的自由空间是一个无源空间，即没有电荷、也不存在电流的空间。当然这并不是说在整个空间中没有源存在，而只是指在我们所感兴趣的区域内不存在源，这个区域应有电荷 $\rho=0$ 和电流 $\boldsymbol{J}=0$ 。在这种条件下，第 2 章中所给出的一般形式的麦克斯韦方程组就变得特别简单，即为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{6.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B} / \partial t \tag{6.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.3}$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{E} / \partial t \tag{6.4}$$

6.1 波的数学描述

在日常生活中，人们会感受到诸如无线电波和光之类的电磁波，它们能够在自由空间中或多种媒质中传播。电磁波的特征是用麦克斯韦方程组来描述的，在开始研究它们之前，必须清楚如何用数学的形式去描述波。

我们知道，一个自变量为 $(z-vt)$ 的函数 $f(z-vt)$ 能够表示以速度 v 并沿着 z 方向传播的行波。假定时间 $t=0$ 时该函数的波形如图 6.1 所示。

现在来看时间 $t=1$ 时波在空间的变化情况。如果将 $t=1$ 代入变量 $(z-vt)$ 中，可得 $(z-v)$ ，于是就可以通过 v 推导出下一时刻所发生的变化。在 $f(z-vt)$ 的点 $(z-v)$ 上，函数相对于每一个 z 的值与 $t=0$ 时的函数值相等，所以很容易描述出 $t=1$ 时刻的函数，如图 6.2 所示。

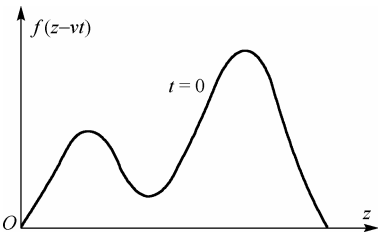


图 6.1 沿着 z 方向传播的行波

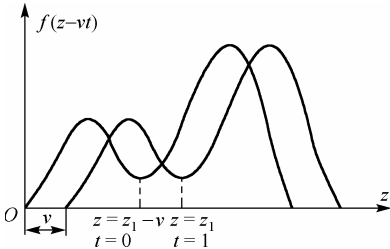


图 6.2 以速度 v 向前传播的波

这样，当时间由 $t=0$ 变为 $t=1$ 时，整个图形沿 z 轴向前移动了一个量 v ，于是就得到了

以速度 v 并沿着 z 轴正方向传播的波。这个结果对于任何变量为 $(z - vt)$ 的函数都适用，这样的函数确定了任意时刻波在空间的传播形式，这种波是以速度 v 向前传播的。同样，任何变量为 $(z + vt)$ 的函数所描述的波则是随时间变化沿着 z 轴负方向传播的。

下面我们将证明以 $(z + vt)$ 和 $(z - vt)$ 为变量的函数满足一维波动方程，即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

式中， ψ 表示一个随时间和空间变化的任意函数； v 则表示函数 ψ 的传播速度。

例 6.1 证明 $\psi = f(z - vt) + g(z + vt)$ 满足式 (6.5) 所示的一维波动方程。

证明：首先考虑函数 ψ 中的第一项，令

$$\psi_f = f(z - vt)$$

它对 z 的偏微分为

$$\frac{\partial [f(z - vt)]}{\partial z} = f'(z - vt)$$

其中 $f'(z - vt)$ 表示 $\frac{\partial [f(z - vt)]}{\partial (z - vt)}$ 。类似地， f'' 表示对 $(z - vt)$ 的二阶导数，即

$$\partial^2 \psi_f / \partial z^2 = f''(z - vt)$$

函数 ψ_f 对时间的导数则为

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(z - vt)] = (-v)f'(z - vt)$$

并且

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [f(z - vt)] = v^2 f''(z - vt) = \frac{\partial^2 \psi_f}{\partial t^2}$$

所以有

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi_f}{\partial z^2}$$

这说明函数 ψ_f 满足一维波动方程。对于函数 $\psi_g = g(z + vt)$ ，也可以得出类似的结果。

如果任意两个函数分别满足同一个微分方程，那么它们的和也必定满足该方程。于是，就证明了以 $(z - vt)$ 和 $(z + vt)$ 为变量的任意函数 $\psi = f(z - vt) + g(z + vt)$ 满足式 (6.5) 所示的一维波动方程。

6.2 均匀平面波与三维波动方程

上面对波的讨论仅局限于一维 (z) 的情况，它只是一个随着 z 的变化沿着 z 轴方向传播的行波。现在我们把这种一维波扩展到三维波，而三维波中最简单的一种情况就是平面波。这样的波在空间传播过程中，对应于任意时刻 t ，在其传播空间具有相同相位的点所构成的等相位面 (也称为波阵面) 为平面，于是就称其为平面波。需要说明的是，所讨论的波只是随着 z 发生变化的 xOy 平面波。因此对于一定的 t 和 z ，我们便能通过对应的 xOy 平面确定其函数值，尽管平面波仅仅是随着 t 和 z 变化的，但其始终都处于三维空间中。

在平面波中，**均匀平面波**是研究起来最简单同时也是最容易理解的。均匀一词意味着在

任意时刻,其所在的平面中场的大小和方向都是不变的。在距离电磁波的激励源很远处,球面波阵面上的一小部分可视为平面,该处的电磁波可称为均匀平面电磁波。

针对式(6.5)而言,三维波动方程的形式如下:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

它可以写成如下形式:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6.6)$$

该方程与一维波动方程非常相似,而三个一维波叠加起来所得结果也将满足三维波动方程,即当

$$\psi = X(x-vt) + Y(y-vt) + Z(z-vt)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \nabla^2 \psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [X(x-vt) + Y(y-vt) + Z(z-vt)] \\ &= \frac{\partial^2 X(x-vt)}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 Y(y-vt)}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 Z(z-vt)}{\partial^2 z^2} \\ &= X''(x-vt) + Y''(y-vt) + Z''(z-vt) \end{aligned}$$

式中, X'' 、 Y'' 和 Z'' 分别表示对于 $(x-vt)$ 、 $(y-vt)$ 和 $(z-vt)$ 的二阶偏导数。

类似地,有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 X''(x-vt) + v^2 Y''(y-vt) + v^2 Z''(z-vt)$$

这样便证明了函数 $\psi = X(x-vt) + Y(y-vt) + Z(z-vt)$ 满足三维波动方程

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

6.3 电波与磁波

麦克斯韦方程组指出:在空间任意点处,时变的电场将产生时变的磁场,时变的磁场将产生时变的电场。为了进一步研究麦克斯韦方程组所蕴含的物理意义,先对式(6.2)取旋度,即

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (-\partial \mathbf{B} / \partial t) \quad (6.7)$$

假设 \mathbf{B} 关于空间和时间的微分与顺序无关,则可以将式(6.7)右边的运算顺序交换,并在其左边运用矢量三重积恒等式,这样使得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (6.8)$$

再考虑到式(6.1)和式(6.4),式(6.8)可变为

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{即有} \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.9)$$

式(6.9)与式(6.6)给出的以 ψ 为变量的一般三维波动方程具有相同的形式,而且其中的 \mathbf{E} 有三个分量,每一个分量都满足该式,同时波的速度 $v=c$ (光速)。于是,可以得出一个具有普遍意义的结论:在自由空间存在着电波,对其所做的唯一的限制是它在自由空间必须以光速传播。

由于 $1/(\varepsilon_0\mu_0)=c^2$,所以式(6.9)还可以写成

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.10)$$

此式又称为亥姆霍兹方程。式中不存在一阶项,表明电波在自由空间中传播时不衰减。

尽管式(6.9)和式(6.10)只涉及到电场 \mathbf{E} ,但从第2章的内容可知,伴随着随时间变化的电场 \mathbf{E} 必定同时存在着一个随时间变化的磁场,这正是麦克斯韦方程组告诉我们的:随时间变化的电场能产生时变的磁场。

采用类似的推导方法,可以证明在自由空间中也存在着磁波 \mathbf{B} 。对式(6.4)取旋度,有

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

假设电场 \mathbf{E} 关于空间和时间的微分与顺序无关,将上式右边的运算顺序交换,并在其左边利用矢量三重积恒等式,可得

$$c^2 [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}] = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (6.11)$$

将式(6.2)和式(6.3)代入式(6.11),得

$$c^2 (-\nabla^2 \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\text{即} \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (6.12)$$

这样就得到了一个仅仅与磁场有关的波动方程,它是一个关于磁感应强度 \mathbf{B} 的三维波动方程。由此可以推断,在自由空间中也存在着以光速传播的磁波,即 \mathbf{B} 波,它与电波(\mathbf{E} 波)相伴共存。

类似地,由于 $1/(\varepsilon_0\mu_0)=c^2$,所以式(6.12)也可以写成

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.13)$$

此式也称为亥姆霍兹方程。式中不存在一阶项,表明磁波在传播时也不衰减。

6.4 自由空间中的平面电磁波

现在,我们来考察一种特殊类型的波,即平面单色波(单波长波),并找出 \mathbf{E} 波和 \mathbf{B} 波在自由空间的传播过程中是如何相互关联的。

6.4.1 随时间变化的单色平面波

考虑一种随时间变化并且角频率为 ω 的正弦波, 如果它只在 z 方向上传播, 那么这种平面波可以用下述方程来描述:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(z) \exp(i\omega t) \quad (6.14)$$

也就是说, 空间和时间中任意一点的电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 是矢量 $\mathbf{E}_s(z)$ 与 $\exp(i\omega t)$ 的乘积, 其中矢量 $\mathbf{E}_s(z)$ 仅为 z 的实函数, ω 是角频率, 对 $\exp(i\omega t)$ 则只取其实部, 即 $\cos \omega t$, 这是因为电场中任一点 (\mathbf{r}, t) 上的电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 必定是一个实物理量。另外, 式(6.14)描述的电波是仅沿着 z 轴方向传播的平面波, 并以角频率 ω 随时间按正弦规律变化, 由于其频率单一且确定, 所以称这种波为平面“单色”波。

如果将式(6.14)中的函数代入一般的三维电波方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{则可得到} \quad \exp(i\omega t) \nabla^2 \mathbf{E}_s = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}_s (-\omega^2) \exp(i\omega t) \quad (6.15)$$

式中, $\exp(i\omega t)$ 与 ∇^2 无关; \mathbf{E}_s 与时间的导数无关。

由于 $\mathbf{E}_s(z)$ 为平面波矢量, 仅为 z 变量的函数, 因而有

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}_s = \frac{d^2 \mathbf{E}_s}{dz^2}$$

这样, 式(6.15)就变为

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_s}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_s \quad (6.16)$$

作为一个矢量方程, 式(6.16)包含了三个常微分方程, 每一个方程分别对应着一个分矢量 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z , 其方程形式为

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f \quad (6.17)$$

式中, f 仅为 z 的函数。式(6.17)表明, f 对 z 微分二次后所得到的函数与 f 仅差一个常数 $-\omega^2/c^2$, 因此方程的解必定是关于 z 的一个指数函数, 假设为

$$f = C \exp(\beta z) \quad (6.18)$$

式中, C 和 β 都是常数, 从 β 所具有的性质看, 我们称其为相位常数。将该解代入式(6.17), 可得

$$\beta^2 = -\omega^2/c^2 \quad \text{或} \quad \beta = \pm i\omega/c$$

于是 f 可以写为

$$f = a \exp(i\omega z/c) + b \exp(-i\omega z/c)$$

式中, a 和 b 为任意常数。上式可以更简捷地记为

$$f = C \exp(\pm i\omega z/c) \quad (6.19)$$

其中 \pm 号表示 C 是两个可能的任意常数,式中的小写字母 c 为光速。

因此,式(6.16)中所包含的三个微分方程的三个解都具有同一个表达形式 $C \exp(\pm i\omega z/c)$,彼此的差异最多在于常数 C 的取值不一样。于是,式(6.16)的解可以表示为

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{e}_x C_1 \exp(\pm i\omega z/c) + \mathbf{e}_y C_2 \exp(\pm i\omega z/c) + \mathbf{e}_z C_3 \exp(\pm i\omega z/c)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{E}_S = \mathbf{E}_0 \exp(\pm i\omega z/c) \quad (6.20)$$

式中, \mathbf{E}_0 表示一个任意的常矢量。对于平面电波,由式(6.20)可得

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_S(z) \exp(i\omega t) = \mathbf{E}_0 \exp(\pm i\omega z/c) \exp(i\omega t) \quad (6.21)$$

于是可知,若指定时间的变化,则空间的变化也随之而定。

由于 C 是任意常数,所以式(6.21)可以写成

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_A \exp(i\omega z/c) \exp(i\omega t) + \mathbf{E}_B \exp(-i\omega z/c) \exp(i\omega t)$$

式中, \mathbf{E}_A 和 \mathbf{E}_B 都是任意常矢量,合并指数项可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, t) &= \mathbf{E}_A \exp[(i\omega/c)(z + ct)] + \mathbf{E}_B \exp[(i\omega/c)(z - ct)] \\ &= \mathbf{E}_A f(z + ct) + \mathbf{E}_B g(z - ct) \end{aligned} \quad (6.22)$$

从前面对波所进行的一般性讨论中可以很清楚地看到,方程的解中的常数 C 所包含的 \pm 号分别表示了波沿着 z 轴正方向传播和沿着 z 轴负方向传播。显然,一旦确定了任意常矢量,电波传播的方向也就随之而定,即电波将会随着时间的变化沿着确定的传播方向以正弦波的形式向前传播。

6.4.2 均匀平面电磁波的特性

自由空间中麦克斯韦第一方程的形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y + \mathbf{e}_z E_z \quad (6.23)$$

这样上述方程就可以写成

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (6.24)$$

对于沿着 z 轴传播的均匀平面电波,由于其场强值在波阵面上处处相等,即 \mathbf{E} 的分量都与 x 、 y 无关,故可将上述方程简化为一维空间的方程,即

$$\partial E_z / \partial z = 0 \quad (6.25)$$

已知平面电波可以描述为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)]$$

式中 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_{0x} + \mathbf{e}_y E_{0y} + \mathbf{e}_z E_{0z}$,将其代入式(6.25),可得

$$(\pm i\omega/c) E_{0z} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] = 0 \quad (6.26)$$

已知 E_{0z} 是一个常量,要使式(6.26)对任意 z 与 t 均成立,则只能 $E_{0z} = 0$ 。这表明,平面电波没有沿 z 轴传播的分量,即在波的传播方向上不存在电场分量,换句话说,平面电波是横波。

这种横波是随时间向前传播的,比如说沿着 z 轴方向传播。如果固定时间,而让波在与 xOy 平面平行的任意平面上行进,则不难发现,在某个平面上电场的值是相同的,并且电场的方向也是一致的,在任何其他平面上也如此,平面与平面之间唯一可能不同的仅仅是电场的大小,在电场方向上可能发生的改变只会是反向。如果在时间固定的情况下沿 z 轴行进,将看到正弦变化的电场,其方向总是相同的,或指向正方向或指向负方向,即与 xOy 平面平行,没有 z 分量。现在假设当波传播时你站在空间某一固定位置,而另有一人站在另一个位置,那么两人之间的差异仅仅是相位的不同,即两个位置的最大值不可能出现在同一时刻。这样的概念对于透彻地理解我们所描述的平面横波,以及寻找物理波与其数学描述之间的关系是非常重要的。

从第2章对麦克斯韦方程组所进行的初步讨论中知道,如果存在一个随时间变化的电场,那么同时必将会出现一个磁场。在自由空间中,这两种场的关系为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (6.27)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t \quad (6.28)$$

现在我们来寻求与平面电波

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0 \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)]$$

相伴而生的磁波。

由于平面电波不存在 z 分量,上式可化为

$$\mathbf{E}(r, t) = \{\mathbf{e}_x E_{0x} + \mathbf{e}_y E_{0y} + \mathbf{e}_z 0\} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] \quad (6.29)$$

由此可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ [E_{0x}] & [E_{0y}] & 0 \end{vmatrix} \quad (6.30)$$

式中, $[E_{0x}]$ 代表 $E_{0x} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)]$; $[E_{0y}]$ 代表 $E_{0y} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)]$ 。

根据式(6.27)有

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{e}_x \left\{ \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial[E_{0y}]}{\partial z} \right\} - \mathbf{e}_y \left\{ \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial[E_{0x}]}{\partial z} \right\} + \mathbf{e}_z \left\{ \frac{\partial[E_{0y}]}{\partial x} - \frac{\partial[E_{0x}]}{\partial y} \right\} \quad (6.31)$$

又因为 $[E_{0x}]$ 和 $[E_{0y}]$ 不是 x 或 y 的函数,所以 \mathbf{e}_z 分量必定为零,即有

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{e}_x (\pm i\omega/c) E_{0y} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] - \mathbf{e}_y (\pm i\omega/c) E_{0x} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] + \mathbf{e}_z 0 \quad (6.32)$$

在式(6.32)两端分别对时间积分,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \mathbf{e}_x \{ (\pm 1/c) E_{0y} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] + f_1(x, y, z) \} - \\ & \mathbf{e}_y \{ (\pm 1/c) E_{0x} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] + f_2(x, y, z) \} + \mathbf{e}_z \{ f_3(x, y, z) \} \end{aligned} \quad (6.33)$$

由于我们感兴趣的是“波”,即随时间变化的量,所以式(6.33)中的“积分常数” $f_1(x, y, z)$ 、 $f_2(x, y, z)$ 和 $f_3(x, y, z)$ 可以置零。因此,伴随着平面电波的磁波为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \mathbf{e}_x \{ (\pm 1/c) E_{0y} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] \} - \\ & \mathbf{e}_y \{ (\pm i\omega/c) E_{0x} \exp[(i\omega/c)(\pm z + ct)] \} + \mathbf{e}_z \{ 0 \} \end{aligned} \quad (6.34)$$

由式(6.34)可知, \mathbf{B} 波在传播的 z 方向上也没有分量, 所以它也是横波。

从上面的分析已知, 相对于传播方向来说, \mathbf{E} 波是横波, \mathbf{B} 波也是横波, 两者都垂直于波的传播方向。那么 \mathbf{E} 波的方向与 \mathbf{B} 波的方向之间又是何种关系呢? 考虑 \mathbf{e}_z 和 \mathbf{E} 的矢量乘积

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ [E_{0x}] & [E_{0y}] & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \{-[E_{0y}]\} - \mathbf{e}_y \{-[E_{0x}]\} + \mathbf{e}_z \{0\}$$

得

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{E} = (\mp c) \mathbf{B} \quad (6.35)$$

从式(6.35)可知, \mathbf{E} 波与 \mathbf{B} 波是相互垂直的。于是, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{e}_z 三者两两垂直。我们将满足这种方向关系的波称为**横向电磁波**, 简称为 TEM 波。

另外, 由于 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}$ 的大小与 \mathbf{E} 的大小相同, 所以 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的大小满足

$$E = cB \quad (6.36)$$

如果把这个结果与第2章中洛伦兹力的表达式

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

相比较, 将会看到: 在电磁场中, 一个电荷所受到的力几乎完全取决于电场, 除非这个电荷在以接近光速的速度运动。

已经得知, 式(6.29)可以表示电磁波在空间传播时的电波, 而式(6.34)则表示相伴而生的磁波。这些方程确定了空间沿着传播的正、负方向相互垂直的两条轴线, 当波在自由空间中传播时, 其方向不会发生变化, 换言之, 场不会发生旋转, 传播的方向也不会改变。

图6.3给出了一个 TEM 波在某个特定时刻沿着 z 方向(传播方向)传播时, 电场矢量和磁场矢量的变化情况。请记住你所观察到的现象, 即任何一条传播中的平行线的变化情况都是相同的。

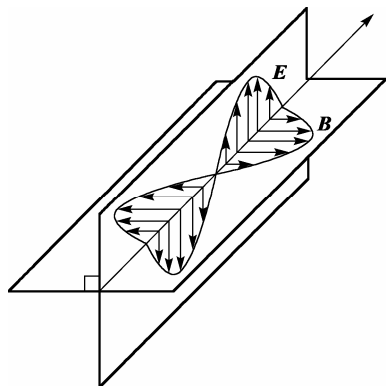


图 6.3 某个特定时刻的 TEM 波

例 6.2 如果用坡印廷矢量的时间平均值 \mathbf{S}_{av} 除以能量密度 \mathbf{S}_{em} 的时间平均值, 其结果被称为能流速度 \mathbf{V}_{em} 。通过 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的复数表达式中的实数部分计算 \mathbf{S} 和 \mathbf{S}_{em} , 并证明自由空间中的均匀平面电磁波的能流速度是光速 c 。

解: 对于均匀平面电磁波, 可以用下面的公式描述电场:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - z/c)]$$

在这里我们指定波是沿着 z 方向传播的, 而电场的振幅 E_0 则指向 $\pm x$ 方向。采用与上述类似的方法, 从麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

可得其伴随磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_y (1/c) E_0 \exp[i\omega(t - z/c)]$$

将复数 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的实部代入到坡印廷矢量 \mathbf{S} 中, 可得

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{e}_z E_0 \cos[\omega(t - z/c)] (1/c) E_0 \cos[\omega(t - z/c)]$$

其时间平均值为

$$S_{\text{av}} = \mathbf{e}_z \varepsilon_0 c E_0^2 (1/2)$$

而能量密度 S_{en} 为

$$S_{\text{en}} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2)$$

对于均匀平面电磁波, 则有

$$\begin{aligned} S_{\text{en}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \{ E_0^2 \cos^2[\omega(t - z/c)] + c^2 (1/c)^2 E_0^2 \cos^2[\omega(t - z/c)] \} \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2[\omega(t - z/c)] \end{aligned}$$

其时间平均值为

$$\bar{S}_{\text{en}} = \varepsilon_0 E_0^2 (1/2)$$

所以, 能流速度为

$$\mathbf{v}_{\text{en}} = \frac{\mathbf{S}_{\text{av}}}{\bar{S}_{\text{en}}} = \mathbf{e}_z \frac{\varepsilon_0 c E_0^2 (1/2)}{\varepsilon_0 E_0^2 (1/2)} = \mathbf{e}_z c$$

这个结果表明: 能流速度与传播方向同向, 并且其速度的大小等于电磁波在自由空间的速度 c 。

6.5 波的极化

均匀平面波是横波, 即对于沿着 z 方向传播的波来说, 其场量没有 z 方向的分量, 但却可以有 x 、 y 方向的分量, 如 E_x 和 E_y 。这时, 在空间中的一点, 电场 \mathbf{E} 可表示为

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t) + \mathbf{e}_y E_y(z, t) \quad (6.37)$$

\mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 及波的传播方向三者之间构成了一个相互垂直的正交系统。其中

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \quad (6.38)$$

$$E_y = E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \quad (6.39)$$

式中, E_1 和 E_2 分别为 E_x 和 E_y 的振幅; φ_x 和 φ_y 分别为 E_x 和 E_y 的相位。

一般情况下, E_x 和 E_y 这两个分量的振幅和相位不一定相同, 所以在同一波阵面上, 合成场量的矢量的振动状态(大小和方向)随时间变化的方式也就不同。由于电场、磁场和传播方向是确定的, 所以只要知道电场矢量的振动状态随时间的变化方式, 磁场矢量的振动状态随时间变化的方式也就知道了。我们称均匀平面波传播过程中, 在某一波阵面上电场矢量的振动状态随时间变化的方式为波的**极化**(或称为偏振)。这种极化通常是用电场矢量 \mathbf{E} 的尖端在空间随时间变化的轨迹来描述的。如果矢量的尖端在一条直线上运动, 则称之为线极化波。如果矢量的尖端的运动轨迹是一个圆, 则称之为圆极化波。对椭圆极化波, 电场矢量 \mathbf{E} 的尖端的运动将描绘出一个椭圆。如果用右手的拇指指向波传播的方向, 其他四指所指的方向正好与电场矢量运动的方向相同, 这个波就是右旋极化波; 反之, 称为左旋极化波。无一定极化的波, 如光波, 通常称为随机极化波。

将式(6.38)和式(6.39)的右边展开, 得

$$\frac{E_x}{E_1} = \cos(\omega t - kz) \cos \varphi_x - \sin(\omega t - kz) \sin \varphi_x$$

$$\frac{E_y}{E_2} = \cos(\omega t - kz) \cos \varphi_y - \sin(\omega t - kz) \sin \varphi_y$$

将两式分别乘以 $\sin \varphi_y$ 和 $\sin \varphi_x$ 后相减, 得

$$\frac{E_x}{E_1} \sin \varphi_y - \frac{E_y}{E_2} \sin \varphi_x = \cos(\omega t - kz) \sin(\varphi_x - \varphi_y) \quad (6.40)$$

将两式分别乘以 $\cos \varphi_y$ 和 $\cos \varphi_x$ 后相减, 得

$$\frac{E_x}{E_1} \cos \varphi_y - \frac{E_y}{E_2} \cos \varphi_x = -\sin(\omega t - kz) \sin(\varphi_x - \varphi_y) \quad (6.41)$$

再将式 (6.40) 和式 (6.41) 分别平方后相加, 得

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y) \quad (6.42)$$

可见, 这是一个非标准形式的椭圆方程, 它表明一般情况下 E_x 和 E_y 的合成波矢量的端点轨迹为一椭圆, 即合成波为椭圆极化波。

现在进一步地来研究从式 (6.42) 可演变出来的几种特殊的极化情况。

情况 1: 直线极化

当 $(\varphi_x - \varphi_y) = 2m\pi$, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots$ 为整数, 则式 (6.42) 变成

$$\left[\frac{E_x(z, t)}{E_1} - \frac{E_y(z, t)}{E_2} \right]^2 = 0$$

或

$$\frac{E_x(z, t)}{E_1} = \frac{E_y(z, t)}{E_2} \quad (6.43)$$

这是直线方程。它表明, 平面波在自由空间传播时, 在不同时刻、不同位置, 电场强度的两个分量虽取不同的值, 但其电场矢量的端点总是在一条直线上变化, 如图 6.4 所示, 所以该波是线极化波, 该直线在第一、三象限。

这条直线(电场 \mathbf{E}) 和 x 轴之间的夹角 θ 满足下列关系式:

$$\theta = \arctan(E_2/E_1) = \text{常数} \quad (6.44)$$

情况 2: 直线极化

当 $(\varphi_x - \varphi_y) = (2m+1)\pi$, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots$ 为整数, 则式 (6.42) 变成

$$\left[\frac{E_x(z, t)}{E_1} + \frac{E_y(z, t)}{E_2} \right]^2 = 0$$

或

$$\frac{E_x(z, t)}{E_1} = -\frac{E_y(z, t)}{E_2} \quad (6.45)$$

这也是直线方程, 其电场矢量的端点也是在一条直线上变化, 该直线在第二、四象限, 如图6.5所示, 所以该波也是线极化波。

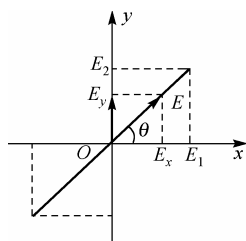


图 6.4 线极化波

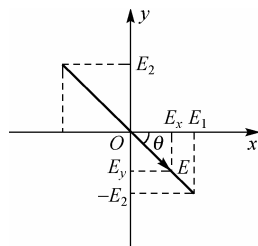


图 6.5 线极化波

只不过这条直线(电场 \mathbf{E})和 x 轴之间的夹角 θ 满足下列关系式:

$$\theta = \arctan(-E_2/E_1) = \text{常数} \quad (6.46)$$

情况 3: 右旋圆极化

当 $(\varphi_x - \varphi_y) = \pi/2$, 并且 $E_1 = E_2 = E_0$ 时, 式(6.42)变成

$$E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t) = E_0^2 \quad (6.47)$$

这是一个以 E_0 为半径的圆的方程, 故为圆极化波。

此时, 电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 与 x 方向的夹角将由动点坐标 $E_x(z, t)$ 和 $E_y(z, t)$ 决定, 即

$$\theta = \arctan \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \arctan \frac{\cos(\omega t - kz - \pi/2)}{\cos(\omega t - kz)} = (\omega t - kz) \quad (6.48)$$

从式(6.48)可以看出, 由于 kz 是一个与时间无关的常量, 所以 θ 角将随时间 t 的增加而变大, 即电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 与 x 轴的夹角将随时间 t 的增加而变大, 如图6.6所示。这时电磁波在传播方向上以 z 轴为旋转轴, 在空间向右旋转着螺旋前进, 因此, 将这种波称为右旋圆极化波。

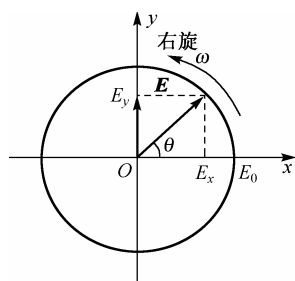


图 6.6 右旋圆极化波

情况 4: 左旋圆极化

当 $(\varphi_x - \varphi_y) = -\pi/2$, 并且 $E_1 = E_2 = E_0$ 时, 式(6.42)变成

$$E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t) = E_0^2$$

这也是一个以 E_0 为半径的圆的方程, 故也是圆极化波。

不过, 此时电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 与 x 方向的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \arctan \frac{\cos(\omega t - kz + \pi/2)}{\cos(\omega t - kz)} = -(\omega t - kz) \quad (6.49)$$

从式(6.49)可以看出, θ 角将随时间 t 的增加而变小, 即电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 与 x 轴的夹角将随时间 t 的增加而变小, 如图6.7所示。这时电磁波在传播方向上以 z 轴为旋转轴, 在空间向左旋转着螺旋前进, 因此, 将这种波称为左旋圆极化波。

情况 5: 右旋椭圆极化

当 $(\varphi_x - \varphi_y) = \pi/2$, 但 $E_1 \neq E_2$ 时, 式(6.42)变成

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1 \quad (6.50)$$

这是一个标准的椭圆方程, 故为椭圆极化波。

因为电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 与 x 方向的夹角将由动点坐标 $E_x(z, t)$ 和 $E_y(z, t)$ 决定, 即

$$\theta = \arctan \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \arctan \frac{E_2 \cos[\omega t - kz - (\varphi_x - \varphi_y)]}{E_1 \cos(\omega t - kz)} \quad (6.51)$$

当 $(\varphi_x - \varphi_y) > 0$ 时, 与 $E_y(z, t)$ 相比, $E_x(z, t)$ 的相位超前, 因此在一个固定点上, $E_x(z, t)$ 将先达到最大值, 然后才轮到 $E_y(z, t)$ 达到最大值。这说明, 随着时间的推移, 电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 的矢量端点按照逆时针方向向右扫出了一个椭圆, 如图6.8所示。于是将这种波称为右旋椭圆极化波。

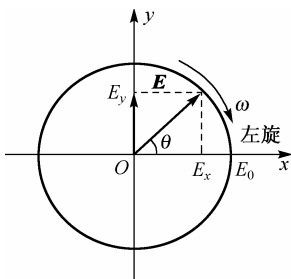


图 6.7 左旋圆极化波

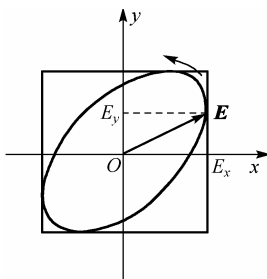


图 6.8 右旋椭圆极化波

情况 6: 左旋椭圆极化

当 $(\varphi_x - \varphi_y) = -\pi/2$, 但 $E_1 \neq E_2$ 时, 式(6.42)可变成

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1 \quad (6.52)$$

这也是一个标准的椭圆方程, 故也为椭圆极化波。

因为

$$\theta = \arctan \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \arctan \frac{E_2 \cos[\omega t - kz - (\varphi_x - \varphi_y)]}{E_1 \cos(\omega t - kz)} \quad (6.53)$$

当 $(\varphi_x - \varphi_y) < 0$ 时, 与 $E_x(z, t)$ 相比, $E_y(z, t)$ 的相位超前, 因此在一个固定点上, $E_y(z, t)$ 将先达到最大值, 然后才轮到 $E_x(z, t)$ 达到最大值。这说明, 随着时间的推移, 电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 的矢量端点按照顺时针方向向左扫出了一个椭圆, 如图6.9所示。于是将这种波称为左旋椭圆极化波。

上述几种情况中, 线极化和圆极化都可看成是椭圆极化的特殊情况。当椭圆的长短轴相等时, 椭圆极化变成圆极化。当椭圆的短轴缩为零时, 椭圆极化退化为线极化。由此可知,

任一椭圆极化波均可分解为两个极化方向互相垂直的线极化波,而任一线极化波均可分解为两个振幅相等但旋转方向相反的圆极化波。

注意: 如果将电场矢量随 z 轴的旋转与电磁波传播方向按照左、右手螺旋定则判断,那么右旋椭圆极化波或右旋圆极化波在给定时刻的矢端曲线恰好为左旋螺旋线,而左旋椭圆极化波或左旋圆极化波在给定时刻的矢端曲线恰好为右旋螺旋线,如图6.10所示。

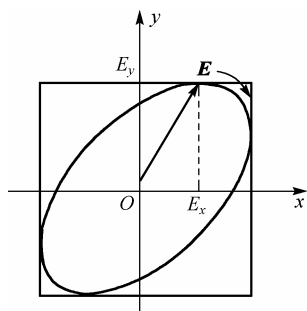


图 6.9 左旋椭圆极化波

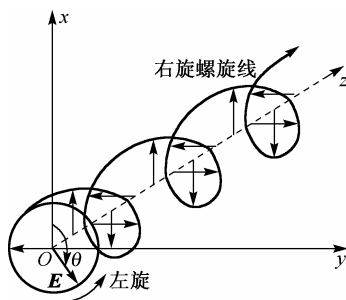


图 6.10 左旋圆极化波的右旋螺旋矢端曲线

另外,在椭圆极化的情况下,电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 的矢端旋转速度为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega E_1 E_2 \sin(\varphi_x - \varphi_y)}{E_1^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_x) + E_2^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_y)} \quad (6.54)$$

当 $0 < (\varphi_x - \varphi_y) < \pi$ 时, $d\theta/dt > 0$, 电磁波为右旋椭圆极化波; 而当 $-\pi < (\varphi_x - \varphi_y) < 0$ 时, $d\theta/dt < 0$, 电磁波为左旋椭圆极化波。同时,从式(6.54)可以看出,椭圆极化波 $\mathbf{E}(z, t)$ 的旋转速度不是常数,而是时间的函数。

从式(6.54)还可得知: 当 $(\varphi_x - \varphi_y) = \pm n\pi$ 时, $d\theta/dt = 0$, 电磁波是线极化波; 当 $(\varphi_x - \varphi_y) = \pm \pi/2$, 且 $E_1 = E_2$ 时, $d\theta/dt = \pm \omega$, 电磁波为圆极化波。

波的极化形式取决于发射源,因此波的极化特性在工程上具有很重要的应用。例如,当利用极化波进行工作时,接收天线的极化特性必须与发射天线的极化特性相同,才能获得好的接收效果,这是天线设计中最基本的原则之一。发射天线若辐射左旋圆极化波,则接收天线在接收到左旋圆极化波的时候,就接收不到右旋圆极化波,反之亦然,这称为圆极化波的旋相正交性。又如,垂直天线发射地波,为垂直极化波,因为从天线到地的 \mathbf{E} 场都是垂直的,因此,接收天线应具有垂直极化特性。而水平天线则发射水平极化波,所以,接收天线应具有水平极化特性。

在很多情况下,无线电系统必须利用圆极化才能进行正常工作。例如,由于火箭等飞行器在飞行过程中,其状态和位置在不断变化,因此火箭上的天线姿态也在不断地改变,此时如用线极化的发射信号来遥控火箭,在某些情况下,可能出现火箭上的天线接收不到地面控制信号,从而造成失控的情况。若采用圆极化发射和接收,则从理论上讲将不会出现失控情况。目前,在电子对抗系统中,大多采用圆极化波进行工作。

工程上由于某种原因,有时还需要对极化进行变换。例如将线极化变换成圆极化,将水平极化变换成垂直极化等。

例 6.3 试用复数法证明,一个线极化平面波可由左旋和右旋两个圆极化波合成得到。

证明: 为简单起见,假设线极化波电场只在 x 方向上,即空间电场表示为

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}^{-ikz} \mathbf{e}_x \quad (1)$$

式(1)可改写为

$$\mathbf{E} = E_1(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)\mathbf{e}^{-ikz} + E_1(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)\mathbf{e}^{-ikz} \quad (2)$$

式中, $E_1 = E_0/2$ 。

式(2)中第一项的 i 说明, E_y 的相位比 E_x 的相位超前 $\pi/2$, E_y 和 E_x 分量的振幅相等, 均为 $E_0/2$ 。根据定义, 第一项代表左旋圆极化波, 而第二项则代表右旋圆极化波, 证毕。

6.6 电磁波谱

自 1888 年赫兹用实验证明了电磁波的存在, 迄今人们已经陆续发现, 不仅光波是电磁波, 还有红外线、紫外线、X 射线、 γ 射线等也都是电磁波, 科学研究证明电磁波是一个大家族。所有这些电磁波仅在波长 λ (或频率 f) 上有所差别, 而在本质上完全相同, 且波长不同的电磁波在真空中的传播速度都是 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \times 10^8$ (m/s)。因为波的频率和波长满足关系式 $f \cdot \lambda = c$, 所以频率不同的电磁波在真空中具有不同的波长。电磁波的频率越高, 相应的波长就越短。无线电波的波长最长(频率最低), 而 γ 射线的波长最短(频率最高)。目前人类通过各种方式已产生或观测到的电磁波的最低频率为 $f = 2 \times 10^{-2}$ Hz, 其波长为地球半径的 5×10^3 倍, 而电磁波的最高频率为 $f = 10^{25}$ Hz, 它来自于宇宙的 γ 射线。为了对各种电磁波有全面的了解, 人们按照波长或频率的顺序把这些电磁波排列起来, 这就是电磁波谱(见表 6.1 和图 6.11)。

表 6.1 电磁波谱

无线电波	微波	红外线	可见光	紫外线	X射线	伽马射线
可见光: 红 橙 黄 绿 蓝 靛 紫						

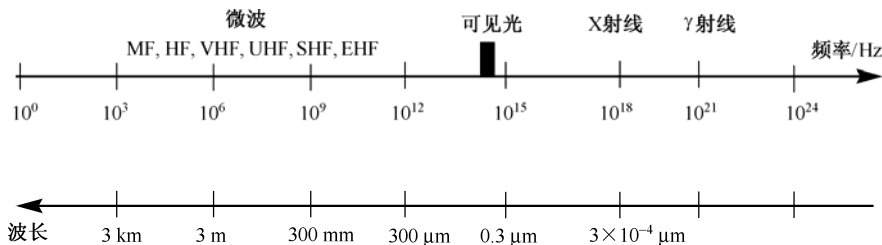


图 6.11 电磁波谱

由于辐射强度随频率的减小而急剧下降, 因此波长为几百千米(10^5 m)的低频电磁波强度很弱, 通常不为人们注意。实际使用的无线电波是从波长约几千米(频率为几百千赫)开始: 波长为 50~3000 m(频率为 100 kHz~6 MHz)的属于中波段; 波长为 10~50 m(频率 6~30 MHz)的为短波; 波长为 1 m~10 cm(频率为 30 MHz~30 GHz)甚至达到 1 mm(频率为 3×10^5 MHz)以下的为超短波(或微波)。有时按照波长的数量级大小也常出现米波、分米波、厘米波、毫米波等名称。中波和短波用于无线电广播和通信, 微波用于电视和无线电定位技术(雷达), 电磁波谱的应用领域见图 6.12。



图 6.12 电磁波谱的应用领域

可见光的波长范围很窄, 大约在 $4000\sim7600\text{ \AA}$ ^① [在光谱学中常采用 \AA (埃) 作为长度单位来表示波长], 从可见光向两边扩展, 波长比它长的称为红外线, 波长大约从 7600 \AA 直到十分之几毫米, 红外线的热效应特别显著。波长比可见光短的称为紫外线, 它的波长范围为 $50\sim4000\text{ \AA}$, 它有显著的化学效应和荧光效应。红外线和紫外线都是人类看不见的, 只能利用特殊的仪器来探测。无论是可见光、红外线或紫外线, 它们都是由原子或分子等微观客体激发的。近年来, 由于超短波无线电技术的不断发展, 无线电波的使用范围不断朝波长更短的方向扩大; 另一方面由于红外技术的发展, 红外线的范围不断朝波长更长的方向扩展。目前超短波和红外线的分界已不存在, 其范围有一定的重叠。 X 射线是由原子中的内层电子发射的, 其波长范围为 $10^{-2}\sim10^2\text{ \AA}$ 。随着 X 射线技术的发展, 它的波长范围也不断朝着两个方向扩展。目前在长波段已与紫外线有所重叠, 短波段已进入 γ 射线领域。放射性辐射 γ 射线的波长是从 1 \AA 左右直到无穷短的波长。

电磁波谱中上述各波段主要是按照得到和探测它们的方式不同来划分的。随着科学技术的发展, 各波段都已冲破界限与其他相邻波段重叠起来。目前在电磁波谱中除了波长极短 (10^{-4} \AA 以下) 的一端外, 不再留有任何未知的空白。

^① \AA (埃) 为非法定长度计量单位, 其中 $1\text{ \AA} = 0.1\text{ nm} = 10^{-10}\text{ m}$ ——编者注。

本章小结

1. 麦克斯韦方程组告诉我们,自由空间中存在着电波和磁波,它们均以光速 c 在其中传播。

2. 下列两个方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{和} \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

称为亥姆霍兹方程。

3. 对于自由空间中的单色平面波,我们知道:

(1) 这种波是横向的,也就是说,波的传播方向与场的方向相互垂直。这种波也称为横电磁波或 TEM 波。

(2) 当波传播的时候不会发生任何旋转,也就是说,一旦固定了电场和磁场的方向,波的传播方向将是确定的(注意,将两个不同相的波进行叠加时,这种合成波的传播方向将会发生旋转,这种旋转可用矢量的合成来进行描述)。

(3) 场向量的大小满足 $E = cB$, 由此可以得出结论:在电磁波中起主要作用的常常是电场力。

4. 称均匀平面波传播过程中,在某一波阵面上电场矢量的振动状态随时间变化的方式为波的极化(或称为偏振),这种极化通常是用电场矢量 \mathbf{E} 的尖端在空间随时间变化的轨迹来描述的。

5. 波的极化分为线极化、圆极化波和椭圆极化。

习 题 6

6.1 一个市面上可以买到的激光器,设其射束面积(即横截面积)为 $6 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$,并且在一个持续时间为 10 ns 的脉冲周期内所能达到的最大功率为 1 mW 。已知激光器是一个相干辐射源(所有的电磁辐射波都是同相位的),并且其辐射波非常接近于单色波,试利用坡印廷矢量和自由空间中的电磁场关系 $E = cB$, 求出这个射束所能产生的最大电场。

6.2 太阳辐射到地球表面的能量大约为 1.2 kW/m^2 , 为了方便计算,假定辐射波为单色、并且是以法线方向入射到地球表面的线性极化平面波,试求辐射波中电场的振幅。

6.3 在自由空间中传播的平面电磁波的电场为 $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_y 10^3 \sin(\omega t - \beta z) (\text{V/m})$, 试求磁场强度 $\mathbf{H}(z, t)$ 。

6.4 已知在自由空间传播的平面电磁波的电场为 $E_x = 100 \cos(\omega t - 2\pi z) (\text{V/m})$, 试求此波的波长 λ 、频率 f 、相速 v 、磁场强度 \mathbf{H} 及平均能流密度矢量 \mathbf{S}_{av} 。

6.5 已知在自由空间传播的平面电磁波的电场的振幅 $E_0 = 800 \text{ V/m}$, 方向为 \mathbf{e}_x , 如果波沿着 z 方向传播,波长为 0.61 m , 试求: (1) 电磁波的频率 f ; (2) 电磁波的周期 T ; (3) 如果将场量表示为 $A \cos(\omega t - kz)$, 其 k 值为多少? (4) 磁场的振幅 $H_0 = ?$

6.6 频率为 100 MHz 的正弦均匀平面波,沿 \mathbf{e}_x 方向传播,当时间 $t=0$ 时,在自由空间一点上 $P(4, -2, 6)$ 的电场强度 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x 100 - \mathbf{e}_y 70) (\text{V/m})$, 试求: (1) $t=0$ 时, P 点的 $|\mathbf{E}(t)|$; (2) $t=1 \text{ ns}$ 时, P 点的 $|\mathbf{E}(t)|$; (3) $t=2 \text{ ns}$ 时,点 $Q(3, 5, 8)$ 的 $|\mathbf{E}(t)|$ 。

6.7 一个在空气中沿 \mathbf{e}_y 方向传播的均匀平面波,其磁场强度的瞬时表达式为 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_z 4 \times 10^{-6} \cos(10^7 \pi t -$

$k_0 y + \pi/4$)(A/m), (1) 求 k_0 , 并求 $t = 3 \text{ ms}$ 时, $H_z = 0$ 的位置; (2) 写出 \mathbf{E} 的瞬时表达式。

6.8 两个均匀平面电磁波沿自由空间 \mathbf{e}_z 方向传播, 当 $t = 0$ 时, 两波的电场在原点都达到最大值 1000 V/m , 方向为 \mathbf{e}_x , 频率 $f_1 = 920 \text{ kHz}$, $f_2 = 930 \text{ kHz}$ 。

(1) 问经过多少时间后两波在原点再次同时达到最大值?

(2) 求出正 z 轴上点的位置, 使该点合成电场 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 2000 \text{ (V/m)}$ 。

6.9 在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 10^{-4} \mathbf{e}^{i(\omega t - 20\pi z)} + \mathbf{e}_y 10^{-4} \mathbf{e}^{i(\omega t - 20\pi z + \pi/2)} \text{ (V/m)}$$

试求: (1) 平面波的传播方向; (2) 电磁波的频率; (3) 波的极化方式; (4) 磁场强度 \mathbf{H} ; (5) 电磁波流过沿传播方向单位面积的平均功率。

6.10 说明下列各式表示的均匀平面波的极化形式和传播方向。

(1) $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x i E_1 \mathbf{e}^{ikz} + \mathbf{e}_y i E_1 \mathbf{e}^{ikz}$

(2) $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_m \sin(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t - kz)$

(3) $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \mathbf{e}^{-ikz} - \mathbf{e}_y i E_0 \mathbf{e}^{-ikz}$

(4) $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_m \sin(\omega t - kz + \pi/4) + \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t - kz - \pi/4)$

(5) $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y 2E_0 \cos(\omega t - kz)$

6.11 在和煦的日子, 地球从太阳接收到的辐射能量大约是 1.3 kW/m^2 , 设太阳光为一单色平面波, 试求: (1) 太阳光中电场及磁场强度的振幅; (2) 太阳的辐射功率, 已知日地距离为 $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$; (3) 估计太阳表面太阳光中电磁场的振幅, 已知太阳半径为 $7 \times 10^8 \text{ m}$ 。

6.12 证明: 一个圆极化波的瞬时坡印廷矢量是与时间和距离都无关的常数。

6.13 电磁波磁场振幅为 $1/3\pi \text{ A/m}$, 在自由空间沿 $-\mathbf{e}_z$ 方向传播, 当 $t=0, z=0$ 时, \mathbf{H} 在 \mathbf{e}_y 方向, 相位常数 $\beta = 30 \text{ rad/m}$ 。试求: (1) \mathbf{H} 和 \mathbf{E} 的表达式; (2) 频率和波长。

6.14 设电磁波频率 $f = 400 \text{ MHz}$, 当 $y = 0.5 \text{ m}$, $t = 0.2 \text{ ns}$ 时, \mathbf{E} 的最大值为 250 V/m , 表征其方向的单位矢量为 $0.6\mathbf{e}_x - 0.8\mathbf{e}_z$, 试用时间的函数表示该均匀平面波在自由空间中沿 \mathbf{e}_y 方向传播的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 。

6.15 自由空间中一均匀平面波的电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{e}^{-i12z} \mathbf{A}$, 若 (1) $\mathbf{A} = 100\mathbf{e}_x$, (2) $(100 - i60)\mathbf{e}_x$, (3) $\mathbf{A} = 100\mathbf{e}^{i35^\circ} \mathbf{e}_x$, (4) $\mathbf{A} = 100\mathbf{e}_x + 80\mathbf{e}_y$, (5) $\mathbf{A} = 100\mathbf{e}^{i35^\circ} \mathbf{e}_x + 80\mathbf{e}^{i52^\circ} \mathbf{e}_y$, 试分别求波的角频率 ω 及 $t = 0$ 时原点处的电场强度幅值。

6.16 一线极化波的两个电场分量分别为 $E_x = 6\cos(\omega t - kz - 30^\circ) \text{ (V/m)}$ 和 $E_y = 8\cos(\omega t - kz - 30^\circ) \text{ (V/m)}$, 试将它分解为振幅相等、旋向相反的两个圆极化波。

6.17 在真空中沿 z 方向传播的均匀平面波的电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-ikz} \text{ (V/m)}$, 式中 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I$, 且 $E_R = 2E_I = A$ 为实常量。设矢量 \mathbf{E}_R 沿 x 方向, \mathbf{E}_I 的方向与 x 轴的夹角为 60° 。试求 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的瞬时值表达式, 并讨论该平面波的极化。

6.18 自由空间中均匀平面波的电场为 $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z (3 - i4)] \mathbf{e}^{-i2\pi(0.8x - 0.6y)} \text{ (V/m)}$, 试求: (1) 相位常数和角频率; (2) $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$; (3) 平均坡印廷矢量。

6.19 在无限空间中有一沿正 z 方向传播的右旋圆极化波, 假定它是由两个线极化波合成的。已知其中一个线极化波的电场沿 x 方向, 在 $z=0$ 处的电场幅值为 $E_0 \text{ (V/m)}$, 角频率为 ω , 试写出此圆极化波的电场 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的表达式, 并证明此波的时间平均能流密度矢量是两个线极化波的时间平均能流密度矢量之和。

6.20 在自由空间中, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 150 \sin(\omega t - \beta z) \text{ (V/m)}$, 试求通过 $z=0$ 平面内的边长为 30 mm 和 15 mm 的长方形面积的总功率。

第 7 章 非导电介质中的电磁波

在第 3 章中，我们找到了一种列写介质中麦克斯韦方程组的简便方法，并且提出了一种非常简单的模型来描述介质的电性能。本章将应用这些结论来导出电磁波在介质中传播时的条件，它们都是由麦克斯韦方程组给出的，所采用的研究方法 with 描述电磁波穿越自由空间的方法基本相同，不过这里得出了一些与介质有关的十分有趣的结论。

7.1 非导电介质中的电磁波方程

在第 3 章中，已得到了在一般媒质中的麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{H} = 0) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

及三个物态方程

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$$

式中， ε 是电介质的介电系数； μ 是磁介质的磁导率； γ 是电导率。

假设所讨论的媒质是无界、线性、均匀和各向同性的，并且所关心的空间中不存在电荷和电流，即 $\rho = 0$ 及 $\mathbf{J}_c = 0$ ，则上述方程组变成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (7.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{H} = 0) \quad (7.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.4)$$

对式 (7.4) 的两边取旋度，可得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

假设上式中 \mathbf{E} 关于空间和时间的微分与顺序无关，从而可交换微分次序。对方程左边运用矢量三重积的恒等式，将式 (7.2) 中的 $\nabla \times \mathbf{E}$ 代入方程右边，即得

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (7.5)$$

将式 (7.3) 代入式 (7.5)，得

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (7.6)$$

同理可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (7.7)$$

式(7.6)和式(7.7)分别称为无界、线性、均匀和各向同性的一般媒质中磁场强度 \mathbf{H} 和电场强度 \mathbf{E} 的电磁波方程(或称为波动方程)。

已知波动方程的一般形式为

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

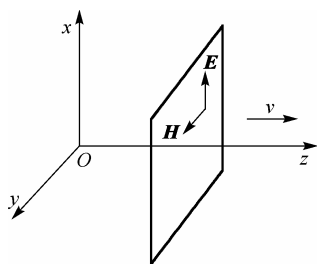


图 7.1 均匀平面电磁波

将式(7.6)和式(7.7)与之相比较,可知在一般介质中,电磁波的传播速度为

$$v = 1/\sqrt{\mu\epsilon} \quad (7.8)$$

为了简便起见,我们分析如图7.1所示的均匀平面电磁波。由于均匀平面电磁波的场强值在波阵面上处处相等,因此其波动方程可简化成一维波动方程。

在图7.1所示的均匀平面电磁波中,电磁波向着 z 方向在传播,根据均匀平面波的定义可直接得出

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

将式(7.9)代入式(7.4),可得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - \mathbf{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{e}_y \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) \quad (7.10)$$

因为方程两端沿同一方向的分量必须相等,所以从式(7.10)可得

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (7.13)$$

式(7.13)表明, E_z 与时间 t 无关,而与时间无关的恒定分量一定是与波动无关的部分,故可取 $E_z = 0$, 也就是说,电场强度矢量只位于 xOy 平面或与之平行的平面上。为分析方便,假设取电场 \mathbf{E} 与 x 轴方向一致,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x \quad (7.14)$$

将式(7.9)和式(7.14)代入式(7.2),得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial H_x}{\partial t} + \mathbf{e}_y \frac{\partial H_y}{\partial t} + \mathbf{e}_z \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \quad (7.15)$$

由此可得

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (7.17)$$

式(7.16)指出： H_x 和 H_z 均与时间无关，因此它们不是波动的部分，故可取 $H_x = H_z = 0$ ，从而有

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H_y \quad (7.18)$$

式(7.18)也可用 $E_z = 0$ 和 $E_y = 0$ 代入式(7.12)直接得到。

将式(7.17)两边对 t 求偏导，得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = -\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (7.19)$$

将式(7.11)两边对 z 求偏导，得

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \quad (7.20)$$

由式(7.19)和式(7.20)解得

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (7.21)$$

同理，由式(7.11)和式(7.17)可解得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (7.22)$$

式(7.21)和式(7.22)构成了描述均匀平面波的一维波动方程。

7.2 平面电磁波在理想介质中的传播

理想介质是一种不导电的无损耗介质，在这里指电导率 $\gamma = 0$ 。对于随时间按照正弦规律变化的电磁场，可用复数形式表示。那么，我们所假设的平面波中的电场就可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i(\omega t - kz)] = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - kz/\omega)] \quad (7.23)$$

其中电场矢量的方向是 $\pm x$ 方向，而电磁波则是沿 z 方向传播的，波速(即相速)为

$$v = \omega/k = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

可见在理想介质中，相速 v 与频率无关。式中的 k 称为传播常数或波数，并且

$$k = \omega/v = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (7.24)$$

ω 为场强随时间变化的角频率， $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ， f 和 T 分别为振荡频率和周期。

这时，由式(7.21)和式(7.22)可知，一维波动方程的形式变成

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon H_y \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon E_x \quad (7.26)$$

式(7.26)的解的形式为

$$E_x = A_1 e^{-ikz} + A_2 e^{ikz} \quad (7.27)$$

式中, kz 代表相角。从式(7.27)可以看出, 随着 z 的增大, 波的相位滞后也增大。因此, $A_1 e^{-ikz}$ 项表示了离开原点向正 z 方向传播的波; 反之, $A_2 e^{ikz}$ 则表示了沿负 z 方向传播的波。考虑到所研究的是无界、均匀、理想介质中的电磁波, 则可取 $A_2 = 0$, 此时有

$$E_x = A_1 e^{-ikz} \quad (7.28)$$

在麦克斯韦方程组的时谐形式中, $\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$ 。考虑到均匀平面波只存在 E_x 和 H_y 分量, 则可得

$$H_y = i \frac{1}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{k}{\omega\mu} A_1 e^{-ikz} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_1 e^{-ikz} \quad (7.29)$$

将式(7.28)代入式(7.29), 可得电场与磁场的振幅比为

$$E_x / H_y = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \eta \quad (7.30)$$

式中, η 称为媒质的波阻抗、或本质阻抗(本征阻抗), 单位为 Ω 。波阻抗 η 只与媒质的特性有关, 是媒质的固有属性。在理想介质中, 波阻抗 η 为实数, 表示电场与磁场同相位。

在自由空间中, 有

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega \quad (7.31)$$

7.3 平面电磁波在非理想介质中的传播

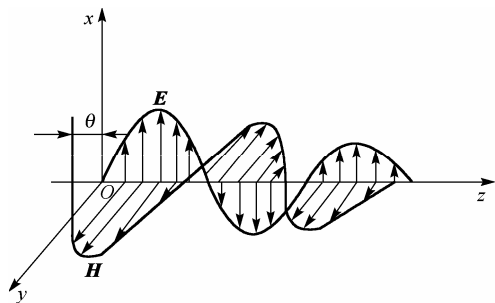


图 7.2 平面波在有损耗介质中的传播

实际的介质都是有损耗的, 因此, 研究波在非理想介质中的传播具有实际意义。非理想介质是有损耗的, 有损耗的介质也称为**耗散**介质, 在这里是指电导率 $\gamma \neq 0$, 但仍然保持均匀、线性及各向同性等特性。

有损耗介质中出现的传导电流会使在其中传播的电磁波发生能量损耗, 从而导致波的幅值随着传播距离的增大而下降。研究表明, 传播过程中幅值下降的同时, 波的相位也会发生变化, 致使整个传输波的形状发生畸变, 如图7.2所示。

7.3.1 等效复介电系数

对于随时间按照正弦规律变化的电磁场, 其复数形式的麦克斯韦方程组中有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad (7.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + i\omega\epsilon\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E} + i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (7.33)$$

式(7.33)可改写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = i\omega(\epsilon - i\gamma/\omega)\mathbf{E} = i\omega\tilde{\epsilon}\mathbf{E} \quad (7.34)$$

式中 $\tilde{\epsilon}$ 称为有耗介质中的等效复介电系数, 即

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - i\gamma/\omega \quad (7.35)$$

之所以称 $\tilde{\epsilon}$ 为等效复介电系数, 是因为将式(7.34)与式(7.4)相比较可知, 有耗介质中的时谐形式麦克斯韦第四方程与理想电介质中的时谐形式麦克斯韦第四方程在形式上是相同的。因此, 采用了等效复介电系数后, 可以将媒质视为一种等效的电介质, 从而使各种媒质都可以用相同形式的麦克斯韦方程组求解。

式(7.35)中, 复介电系数的虚部与实部之比为 $\gamma/\omega\epsilon$, 它代表了传导电流和位移电流密度的比值。该比值是一个相角, 可以用来描述媒质损耗的强弱, 工程上称之为损耗正切, 表示为

$$\tan \delta_c = \gamma/\omega\epsilon \quad (7.36)$$

式中, δ_c 称为损耗角。

除了用复介电系数 $\tilde{\epsilon}$ 代替无耗介质中的 ϵ 以外, 有耗介质中的复数麦克斯韦方程组在形式上与无耗介质中的麦克斯韦方程组完全相同, 所以可直接写出有耗媒质中的本征阻抗为

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\mu/\tilde{\epsilon}} = \sqrt{\mu_r\mu_0/\tilde{\epsilon}_r\epsilon_0} = \eta\sqrt{\mu_r/\tilde{\epsilon}_r} = |\tilde{\eta}|e^{i\theta} \quad (7.37)$$

式中, $\tilde{\epsilon}_r$ 为相对复介电系数。式(7.37)表明, 有耗介质的本征阻抗是一个复数, 其结果使均匀平面波中电场强度矢量与磁场强度矢量之间存在相位差。

7.3.2 波动方程及其解

在式(7.25)和式(7.26)中, 若用 $\tilde{\epsilon}$ 代替 ϵ , 则可得有耗媒质中均匀平面波的一维波动方程为

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \tilde{\epsilon} H_y = -\tilde{k}^2 H_y \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \tilde{\epsilon} E_x = -\tilde{k}^2 E_x \quad (7.39)$$

式中, 传播系数 $\tilde{k} = \omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}}$ 。可见, 在有耗媒质中, 传播系数 \tilde{k} 是一个复数, 称为复波数。

为了分析的方便, 引入另一个变量 Γ , 并且令 $\Gamma = i\tilde{k}$, Γ 也可称为传播系数, 它也是一个复数。于是, 为了进一步方便分析, 可将 Γ 直接表示为复数的形式, 即令

$$\Gamma = \alpha + i\beta \quad (\text{其中 } \alpha, \beta \text{ 为实数})$$

$$\text{这时} \quad \Gamma = i\tilde{k} = \alpha + i\beta \quad (7.40)$$

关于 Γ 我们将在第 10 章中进一步讨论, α 和 β 可从上述关系中得到:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad (7.41)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad (7.42)$$

于是,上面的一维波动方程的解可写为

$$H_y = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-ikz} = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-\Gamma z} = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-(\alpha+i\beta)z} = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \quad (7.43)$$

$$E_x = E_0 e^{-ikz} = E_0 e^{-\Gamma z} = E_0 e^{-(\alpha+i\beta)z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \quad (7.44)$$

式中, E_0 为按正弦变化的电场的幅值。从式(7.43)和式(7.44)可以发现,场量的振幅按照指数规律 $e^{-\alpha z}$ 随 z 的增加而减小,即 α 的存在会引起场量 E_x 和 H_y 呈指数型衰减。因此,将 α 称为**衰减常数**,单位为奈培/米(Np/m)。同时,从式(7.43)和式(7.44)还可以发现,场量的相位按照指数规律 $e^{-i\beta z}$ 随 z 变化,即 β 的存在会引起场量 E_x 和 H_y 的相位发生变化, β 标志着单位距离落后的相位,于是将 β 称为**相位常数**,单位为弧度/米(rad/m)。由式(7.42)可知, ω 、 γ 和 ϵ 越大, β 就越大。回顾式(7.28)和式(7.29),式中的波数 k 为实数,均匀平面波在理想介质中传播没有衰减,只存在相移,所以那里的 k 与这里的 β 地位相同。这时的等相位面 $(\omega t - \beta z)$ 为常数,于是有耗媒质中均匀平面波的相速为

$$v = dz/dt = \omega/\beta$$

并且波长为

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

与理想介质中的平面波相比,有耗媒质中均匀平面波的波长变短,相速变慢。由于相速 v 与频率有关,于是在同一媒质中,不同频率的波将以不同的速度传播,这种现象称为**波的色散**,相应的媒质称为**色散媒质**。

式(7.41)和式(7.42)是有耗媒质中波的衰减常数 α 和相位常数 β 的一般表达式,对于不同的媒质, α 和 β 会使介质的性质发生变化,通常有如下一些对应的分类。

1. 理想介质 电导率 $\gamma = 0$, $\gamma/\omega\epsilon = 0$, 这时 $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 。这是 7.3.1 节讨论过的情况。

2. 良介质 $\gamma/\omega\epsilon \ll 1$ (一般取 $\gamma/\omega\epsilon \leq 0.1$), 这时 $\alpha = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 。可以看出,在良介质中, β 与理想介质的情况近似,属于非色散媒质;但衰减常数不等于零,并且随着频率增高,衰减将加剧。

3. 理想导体 $\gamma = \infty$, 这时 $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$ 。 $\alpha = \infty$ 说明电磁波在理想介质中立刻衰减到零; $\beta = \infty$ 说明波长为零,相速为零。这些特点表示电磁波不能进入理想导体内部。

4. 良导体 $\gamma/\omega\epsilon \gg 1$ (一般取 $\gamma/\omega\epsilon \geq 10$), 这时 $\alpha = \beta = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}$ 。可以看出 γ 和 ω 越大,衰减越快,波长越短,相速越低;相速与频率有关,是色散媒质。

5. 半导体 γ 可与 $\omega\epsilon$ 相比拟,这时 α 和 β 的表示如式(7.41)和式(7.42)所示。

另外,在无损耗介质中,由于 $\gamma = 0$, 则根据式(7.41)有 $\alpha = 0$, 根据式(7.42)有 $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k = \omega/v$ 。

7.4 低密度气体中的电磁波

首先仍然假设场中不存在自由电荷和自由电流, 即 $\rho_f = 0$ 及 $\mathbf{J}_f = 0$, 于是由第3章可知, 非导电介质中的麦克斯韦方程组可以写成

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0) = 0 \quad (7.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (7.46)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.47)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0) \quad (7.48)$$

采用第6章中关于寻求 \mathbf{E} 的波动方程的方法, 对式(7.46)取旋度得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

假设上式中 \mathbf{B} 关于空间和时间的微分与顺序无关, 故而可交换微分次序。根据矢量三重积的恒等式, 并将式(7.48)中的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 代入上式, 可得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

根据式(7.45), 将上式中 \mathbf{E} 的散度($\nabla \cdot \mathbf{E}$)用 \mathbf{P} 来表示, 可以得到

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

或写成

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (7.49)$$

式(7.49)看上去很有可能变为如下形式的关于 \mathbf{E} 的三维波动方程, 即

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (7.50)$$

显然这要取决于 \mathbf{P} 和 \mathbf{E} 之间所存在的是何种关系, 这个问题讨论起来有些复杂, 为了简单起见, 可以考虑单色平面极化波, 看看描述它的方程是否满足式(7.49)。

我们知道平面波中的电场可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i(\omega t - kz)] = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - kz/\omega)] \quad (7.51)$$

其中电场矢量的方向是 $\pm x$ 方向, 而电磁波则是沿 z 方向传播的, 波速为 $v = \omega/k$, k 是传播常数或称为波数。已知介质的折射率 n 的定义为

$$n = c/v$$

因而电场方程可以写成

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - zn/c)] \quad (7.52)$$

这表明, 在介质内部电荷的位移是沿着所施加的电场方向的, 所以极化矢量 \mathbf{P} 也朝着 $\pm x$ 方向上, 并且随着角频率 ω 变化, 于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\partial P_x}{\partial x} = 0 \quad (7.53)$$

矢量 \mathbf{P} 像 \mathbf{E} 一样仅有 x 方向上的分量, 并且该分量也像 \mathbf{E} 一样仅与 z 和 t 有关。所以式(7.49)中用矢量 \mathbf{P} 表示的另一项 $\partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$ 在平面波的情况下有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} &= \mathbf{e}_x \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} + \mathbf{e}_y \frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} + \mathbf{e}_z \frac{\partial^2 P_z}{\partial t^2} \\ &= \mathbf{e}_x \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} = \mathbf{e}_x (-\omega^2 P_x)\end{aligned}\quad (7.54)$$

类似地, 可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{e}_x \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mathbf{e}_x \left(-\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) E_x \quad (7.55)$$

并且

$$\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = \mathbf{e}_x (-\omega^2) E_x \quad (7.56)$$

将式(7.53)~式(7.56)代入式(7.49), 可得

$$\left(-\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) E_x = \left(\frac{1}{c^2} \right) (-\omega^2) E_x + \left(\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \right) (-\omega^2) P_x + 0$$

即

$$E_x (n^2 - 1) = P_x / \epsilon_0 \quad (7.57)$$

对于其间分子呈均匀分布的介质(如本节的低密度气体)来说, 极化矢量 \mathbf{P} 与电场矢量 \mathbf{E} 之间的关系(见 3.2 节)为

$$\mathbf{P}_{\text{av}} = \epsilon_0 N \alpha_p \mathbf{E} \quad (7.58)$$

式中, α_p 为分子极化率; N 是单位体积内的分子个数。现在 \mathbf{P} 和 \mathbf{E} 仅含 x 方向的分量, 故有

$$P_{\text{xav}} = \epsilon_0 N \alpha_p E_x \quad (7.59)$$

如果我们所关心的只是电磁波穿过大量的介质(分子级)时所发生的情况(通常都是如此), 就可以假设介质的任何影响都只是对分子结构所产生的平均影响。因此, 在计算介质极化问题时也就可以使用介质中的平均值。将 P_x 的平均值代入式(7.57)中, 可得

$$n^2 = 1 + N \alpha_p \quad (7.60)$$

这就是平面电磁波在上述模型所表示的一般介质(如低密度气体)中传播时所必须满足的条件, 它建立了折射率 n 与分子模型参数 α_p 之间的联系。对于大量介质而言, 用折射率来度量是比较宏观的, 因此采用极化平均值是合理的。

因为上面所得到的结果适用于低密度气体, 故而 n 的值会接近于 1, 即 $N \alpha_p$ 的值比 1 要小得多, 这时可将式(7.60)写成

$$n = (1 + N \alpha_p)^{1/2}$$

它可以近似地等于二项式展开后的前两项, 即

$$n \approx 1 + \frac{N \alpha_p}{2} \quad (7.61)$$

式中, α_p 可以用分子模型来表示(见 3.1 节), 即

$$\alpha_p = \frac{q^2 / m \epsilon_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \alpha \omega}$$

此式表明, 折射率 n 与频率有关并且可以是复数, 这些问题将在 7.6 节中进行深入的讨论。

7.5 高密度介质中的电磁波

上面我们得出的关于折射率的表达式只适用于低密度气体，这是因为高密度介质中的分子内，电荷分离所产生的场的作用使得电极化场更为复杂。计算介质中局部场的问题已在第3章中进行过讨论，并且得出了静电场情况下的洛伦兹表达式，这一结果可以推广到波的分析中，但要求这种波的波长足够长以使其能够在大量分子中传播。就单个分子而言，它们在任何时刻都与其相邻分子所受到的场的作用基本相同。

由于局部场是介质中产生极化的起因，为了得到高密度介质情况下的结果，需要根据局部场对7.4节中得出的有关低密度气体中的电场部分进行修正。从式(3.29)已知洛伦兹方程给出的局部场为

$$\mathbf{E}_{\text{local}} = \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{av}}/3\epsilon_0 \quad (7.62)$$

由式(7.58)可知

$$\mathbf{P}_{\text{av}} = N\epsilon_0\alpha_p\mathbf{E}_{\text{local}} \quad (7.63)$$

于是有

$$\mathbf{P}_{\text{av}} = N\epsilon_0\alpha_p(\mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{av}}/3\epsilon_0)$$

即

$$(1 - N\alpha_p/3)\mathbf{P}_{\text{av}} = N\epsilon_0\alpha_p\mathbf{E}$$

所以

$$\mathbf{P}_{\text{av}} = \frac{N\epsilon_0\alpha_p}{(1 - N\alpha_p/3)}\mathbf{E} \quad (7.64)$$

由式(7.64)可知，介质的极化与场之间虽仍然是线性关系，但是比例系数却已经变了。在平面波中有

$$P_{\text{xav}} = \frac{N\epsilon_0\alpha_p}{(1 - N\alpha_p/3)}E_x \quad (7.65)$$

用 P_{xav} 代替式(7.57)中的 P_x ，则有

$$n^2 - 1 = \frac{N\epsilon_0\alpha_p}{(1 - N\alpha_p/3)} \quad (7.66)$$

经整理得

$$\frac{3(n^2 - 1)}{n^2 + 2} = N\alpha_p \quad (7.67)$$

式中的分子极化率仍为

$$\alpha_p = \frac{q^2/m\epsilon_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\alpha\omega}$$

式(7.67)称为克劳休斯-莫索提方程。因为 $\epsilon_r = n^2$ ，所以用相对介电系数可将克劳休斯-莫索提方程写成另一种形式：

$$\frac{3(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)} = N\alpha_p \quad (7.68)$$

这样，将洛伦兹方程用于简单的无极化、均匀、各向同性、线性、绝缘介质中的局部场，便得出了上述克劳休斯-莫索提方程。将它应用到无极化气体和液体中，所得实验结果也与方程

非常吻合。注意, 在折射率 n 较小时式(7.67)可以简化为式(7.60)。

7.6 复数折射率的相关结论

上面得出了两个等式

$$n^2 = 1 + N\alpha_p \quad \text{和} \quad \frac{3(n^2 - 1)}{n^2 + 2} = N\alpha_p$$

它们都描述了分子极化率 α_p 与折射率 n 之间的关系, 具体使用哪个等式则取决于介质的密度。由于每个式子中都含有 α_p , 并且有

$$\alpha_p = \frac{q^2/m\epsilon_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\alpha\omega}$$

这样折射率中就可能因为含有阻尼项 $i\alpha\omega$ 而成为复数。关于这个问题的进一步论述, 将放到后面讨论导电介质时进行, 这里仅从电磁波在介质中传播的角度来讨论复数折射率的意义。

我们知道, 单色、线性、极化平面电磁波的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - zn/c)]$$

如果将其中的复数折射率写为

$$n = n_r - in_i \quad (7.69)$$

这里 n_r 和 n_i 均为实数, 则上述电场的表达式变为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \exp(-\omega z n_i / c) \exp[i\omega(t - z n_r / c)]$$

这个等式表明, 复数折射率的实部决定了波的速度, 而且很容易得出折射率实部的定义为两个速度之比, 即 $n_r = c/v$ 。当波在介质中传播时, 复数折射率的虚部使波的幅值按指数规律衰减, 虚部值越大, 波的衰减就越快。显然, 这是由于分子模型中存在衰减因子 α 的原因。当 $\omega = \omega_0$, 即当波的频率等于分子的谐振频率时, 分子极化率就变成了纯虚数。在这种情况下, 波的能量被介质耗散的程度最大。实际介质中存在着几个这样的谐振频率点, 在这些点上波的辐射达到最小。

7.7 相速与能流速度

在 7.6 节中, 已经知道复数折射率中的虚部将使波在传播时发生衰减, 而其部则决定着波的速度, 现在就来详细地讨论一下在比较简单的低密度气体中波的传播速度问题。

如前所述, 在低密度气体中, 折射率 n 的近似表达式为

$$n \approx 1 + \frac{1}{2} N\alpha_p$$

即有

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\alpha\omega} \\ &= 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} \end{aligned}$$

这样, 如果将复数折射率写成

$$n = n_r - in_i$$

那么折射率的实部就为

$$n_r = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} \quad (7.70)$$

而虚部则为

$$n_i = \frac{\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \quad (7.71)$$

假如当频率 $\omega = \omega_0$ 时发生谐振, 则上述两式都可以化为最简形式:

$$n_r = 1 \quad (7.72)$$

$$n_i = \frac{1}{\alpha\omega_0} \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \quad (7.73)$$

虽然 n_i 在任何频率下均为正值, 但当频率 ω 大于谐振频率 ω_0 时, $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 为负, 这时折射率的实部 n_r 小于 1。我们知道, 折射率的实部被定义为自由空间中的电磁波速 c (光速) 与介质中的波速 v 之比, 即

$$n_r = c/v$$

如果 n_r 小于 1, 则意味着电磁波速将超过光速, 这不就与爱因斯坦的狭义相对论发生矛盾了吗? 显然, 必须慎重对待电磁波在介质中的传播速度问题。假如我们所得出的结论是能流速度大于光速, 那么问题就出现了, 因为目前这种情况尚不存在。为了强调这一点, 我们将速度 v 称为相速, 即正弦波的最大速度。一般情况下, 相速 v 是恒定相位面在波中向前推进的速度, 所以也可以根据电场极小值通过空间一固定点的速度来定义这个速度。具体来看, 如果平面波中的电场表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$$

则当经过时间 Δt 后, 各点电场发生的相位变化为 $\omega\Delta t$, 因此电场沿 z 轴的分布也发生了变化, 如图 7.3 所示。图中, 实线图形与虚线图形相比, 沿 z 轴平移了 Δz , 这表明在波的传播过程中, 每一等相位面沿 z 轴向前移动的距离均为 Δz , 等相位面移动的速度就是相速。

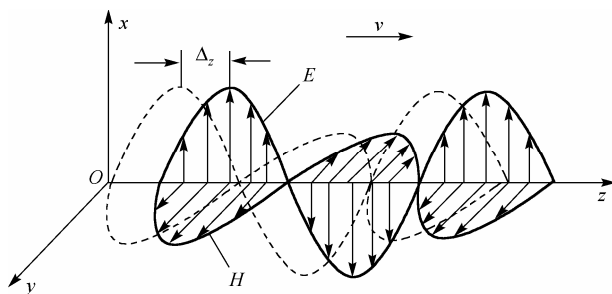


图 7.3 等相位面沿 z 轴向前移动

在例 6.2 中, 我们知道自由空间中的能流速度和相速均为 c , 但是介质中的复数折射率告诉我们, 这两种速度在介质中不再相等了, 换言之, 我们不可能以大于光速的相速 v 发射信号(能量)。这也就是说, 超越物理速度的极限 c 是不可能的。注意, 使问题变得复杂的原因仅仅是由于折射率的虚部不为零, 这时的波在传播过程中会产生衰减损耗的现象。如果我们来观察空间中波的极小值(或极大值), 由于存在着衰减, 那么波的每一个极小值的大小都将不同, 对于这个问题, 将在后面继续讨论。下面的例子将对能流速度进行分析和说明。

例7.1 能流速度为坡印廷矢量的时间平均值 S_{av} 除以能量密度 S_{en} 的时间平均值, 试通过由 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的复数表达式的实部计算得到 \mathbf{S} 和 S_{en} , 从而求出简单平面电磁波在均匀、各向同性的绝缘介质中传播时的能流速度, 并证明当折射率接近真空中的折射率时, 能流速度接近于光速 c 。

解: 设电场指向 x 方向, 电磁波沿正 z 轴方向传播, 则电磁波可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - zn/c)]$$

式中, 折射率 n 定义为

$$n = n_r - in_i$$

根据麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

相应的磁场可以表示为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_y (n/c) E$$

坡印廷矢量则为

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad [\text{J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)]$$

因此, 能量密度为

$$S_{\text{en}} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad [\text{J}/\text{m}^3]$$

由上面电场和磁场的表达式可以得出它们的实部分别为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \exp(-\omega z n_i / c) \cos[\omega(t - z n_r / c)]$$

和 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_y (E_0 / c) \exp(-\omega z n_i / c) \{n_r \cos[\omega(t - z n_r / c)] + n_i \sin[\omega(t - z n_r / c)]\}$

这样, 坡印廷矢量就可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_z \varepsilon_0 c^2 (1/c) E_0^2 \exp(-2\omega z n_i / c) \{n_r \cos^2[\omega(t - z n_r / c)] + \\ & n_i \sin[\omega(t - z n_r / c)] \cos[\omega(t - z n_r / c)]\} \end{aligned}$$

取其时间平均值, 得

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \mathbf{e}_z \varepsilon_0 c E_0^2 \exp(-2\omega z n_i / c) [n_r (1/2)]$$

而能量密度这时可以表示为

$$\begin{aligned} S_{\text{en}} = & \frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ E_0^2 \exp(-2\omega z n_i / c) \cos^2[\omega(t - z n_r / c)] + \right. \\ & c^2 \left[(1/c)^2 E_0^2 \exp(-2\omega z n_i / c) \{n_r^2 \cos^2[\omega(t - z n_r / c)] + \right. \\ & 2n_r n_i \cos[\omega(t - z n_r / c)] \sin[\omega(t - z n_r / c)] + \\ & \left. \left. n_i^2 \sin^2[\omega(t - z n_r / c)]\} \right] \right\} \end{aligned}$$

对 S_{en} 也取其对时间的平均值, 得

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\text{en}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ E_0^2 \exp(-2\omega z n_i / c)(1/2) + E_0^2 \exp(-2\omega z n_i / c) \left(\frac{n_r^2}{2} + \frac{n_i^2}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \exp(-2\omega z n_i / c) (1 + n_r^2 + n_i^2)\end{aligned}$$

则能流速度为

$$\mathbf{e}_{z\text{en}} = \frac{\mathbf{e}_{z\text{av}}}{\bar{S}_{\text{en}}} = \mathbf{e}_z \left\{ \frac{2cn_r}{1 + n_r^2 + n_i^2} \right\}$$

在自由空间, $n_r = 1$ 且 $n_i = 0$, 则 $v_{\text{en}} = c$, 这正是我们所预想的结果。

7.8 色 散

从上面的讨论可知, 波的相速与介质折射率有关, 而介质折射率又与频率有关, 所以波的相速将随频率而变, 即不同频率的波将以不同的速率在介质中传播。这种现象称为**色散**现象, 显然波的色散是由媒质特性所决定的。实际上, 在时变电磁场中, 描述媒质电磁性质的介电系数 ε 、电导率 γ 和磁导率 μ 这几个参数都是电磁场频率的函数。

从本质上来说, 色散现象来源于媒质的极化、磁化和载流子的定向运动。微观地看, 媒质是由一群既有质量又带电量的基本粒子组成的。在时变电磁场的作用下, 极化、磁化和载流子运动都将随着电场和磁场的指向变化而不断改变方向。由于电荷载体粒子的惯性影响, 粒子的运动将落后于场的变化, 产生滞后效应。以极化为例, 对于电子极化、离子极化和转向极化这三种不同的极化方式, 由于偶极子载体的质量不同, 所产生的滞后效应也不同。转向极化是整个分子的转动, 质量和惯性较大, 极化状态的建立需要较长时间; 离子极化是原子的位移, 极化建立所需的时间比转向极化短; 而电子极化是电子的位移, 电子质量相对最小, 极化建立时间最短。当电磁场频率较低时, 场的变化周期 T 远大于三种极化状态的建立时间, 媒质极化强度 \mathbf{P} 在大部分时间内与电场 \mathbf{E} 的方向一致, 因此 \mathbf{P} 的平均值较大, 与静态电场中的极化强度值相近。随着频率的提高, 特别是当场的变化周期 T 接近或小于极化建立时间时, 首先是转向极化, 然后是离子极化, 极化状态将变得不够充分, 即尚未等到偶极矩完全转向, 电场又转到相反方向了, 使得极化状态跟不上场的变化。此时, 转向极化和离子极化对总极化强度 \mathbf{P} 的贡献比例将逐渐减小。当电磁场频率很高时, 只有电子极化的建立能够跟得上场的周期变化, 极化强度以电子极化的贡献为主, \mathbf{P} 的模值变得很小。

对于极性分子的媒质, 由于其低频极化以转向极化为主, 所以极化强度随频率变化比较剧烈。以水为例, 当场从静态到光频, 极化强度 \mathbf{P} 的模值变化将近 40 倍。对非极性分子媒质, 其极化主要是电子极化, 极化强度随频率的变化比较缓慢。如聚苯乙烯塑料, 当场从静态到光频, 极化强度 \mathbf{P} 的模值仅变化百分之几。

此外, 由于极化状态滞后于电场状态, 因此除了极化强度 \mathbf{P} 的模值随频率变化外, 其相位也要滞后于电场 \mathbf{E} 的相位, 即

$$\varphi_{\mathbf{P}} = \varphi_{\mathbf{E}} - \varphi$$

当频率 ω 不同时, 滞后的时间与场变化周期 T 的比值不同, 所以滞后相位 φ 也是频率 ω 的函数。

由于极化强度 \mathbf{P} 与电场 \mathbf{E} 存在相位滞后, 所以与静态极化类似的瞬时关系式

$\mathbf{P}_{av}(t) = \varepsilon_0 N \alpha_p \mathbf{E}(t)$ 一般并不成立, 因为无论 α_p 取任何与时间无关的实函数, 都无法使 \mathbf{P} 的相位滞后于 \mathbf{E} 。此时 $\mathbf{P}(t)$ 与 $\mathbf{E}(t)$ 的关系一定是一个复杂的函数关系:

$$\mathbf{P}(t) = f[\mathbf{E}(t), \omega]$$

由此可知, $\mathbf{D}(t)$ 与 $\mathbf{E}(t)$ 的关系也不具备 $\mathbf{D}(t) = \varepsilon \mathbf{E}(t)$ 的简单形式。所以, 对于色散媒质, 将无法使用时域方法求解麦克斯韦方程组, 而必须采用频域法。

媒质分为有色散媒质和无色散媒质两类, 有色散媒质中又分为正常色散媒质和非正常色散媒质。在正常色散媒质中, 波长大的波, 相速较大; 在非正常色散媒质中, 波长小的波, 相速较大; 在无色散媒质中, 不同波长的波相速相等。

如图7.4所示, 由于折射率随着频率的“规则”变化而与之相反变化, 故 dn/df 是负的, 因而在谐振频率附近的频域就是“非正常色散区”。如果用一个三棱镜将一束阳光进行分谱, 那么在非正常色散区各种频谱的排列顺序就会被颠倒。图7.4表明在非正常色散区折射率的虚部存在着极大值, 因而波的能量损失严重。对于实际的介质来说, 由于电荷位移的方式不止一种, 所以存在着多个谐振频率, 结果就会有許多像这样的非正常色散区。

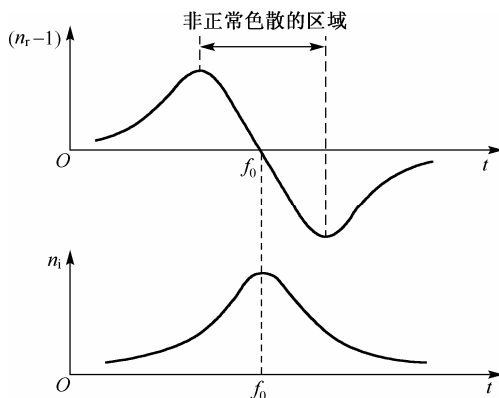


图 7.4 非正常色散区

例 7.2 试证明非正常色散区的频率范围为 $f = f_0[1 \pm \alpha/2\omega_0]$ 。

证明: 已知折射率的实部为

$$n_r = 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}$$

在上式中对 ω 微分再令其为零, 便可以得到 n_r 对于频率曲线的转折点, 具体求解如下:

$$2\omega(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\alpha^2 \omega \omega_0^2 = 0$$

即有

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2 \omega_0^2$$

因而

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \alpha \omega$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 [1 \pm \alpha/\omega_0]$$

一般认为 $\alpha/\omega_0 \ll 1$, 于是有

$$\omega = \omega_0 [1 \pm \alpha/2\omega_0]$$

这样便得到

$$f = f_0 [1 \pm \alpha/2\omega_0]$$

7.9 相速与群速

上面讨论了波在色散和耗散介质中传播时的情况。在色散介质中,波的传播速度即相速取决于介质折射率的实部,因而随频率而变,不同频率的波将以不同的速率在其中传播。耗散介质则是指其折射率的虚部为非零值的媒质,这时波在传播的过程中会逐渐衰减。现在,我们所讨论的是色散与耗散现象同时存在的情况,之所以如此,是因为当折射率的实部不等于1时其虚部就不为零。从通信的角度来看,重要的是要能够将多频信号发送出去,并且了解这种信号是如何受到介质色散性影响的。

我们知道,在色散介质中两种不同频率的波具有不同的传播速度。假设两个略有差别的波分别用 ψ_1 和 ψ_2 来表示,即

$$\psi_1 = A \cos[(\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z] \quad (7.74)$$

$$\text{和} \quad \psi_2 = A \cos[(\omega - \delta\omega)t - (k - \delta k)z] \quad (7.75)$$

式中, A 为常数。将两个波叠加起来并经整理,得

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos[(\delta\omega)t - (\delta k)z] \cos[\omega t - kz] \quad (7.76)$$

所得到的结果是一个角频率为 ω 的正弦波被另一个正弦波调制的情况,如图7.5所示。

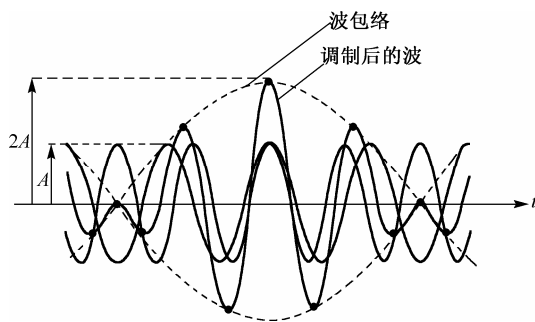


图 7.5 调制波

由图7.5可知,合成波的振幅是受调制的,称之为包络波,如图中的虚线所示。包络波的传播速度为 $\delta\omega/\delta k$,而基波的相速仍为 ω/k 。因此,有必要再引入一个速度——群速 v_g ,其定义为 $d\omega/dk$,即

$$v_g = d\omega/dk \quad (7.77)$$

注意: 这个定义是基于无损介质得出的。对于有损耗介质,群速的概念仅适用于非常窄的频带,这是因为不同频率分量的衰减不同,将出现使波包产生畸变失真的现象。

一般情况下,相速与群速不相等,这是由于波包通过有色散的媒质,不同单色波分量以不同相速向前传播引起的。

已知相速为

$$v = \omega/k \quad (7.78)$$

由式(7.77)可得

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega} v_g$$

所以得

$$v_g = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}} \quad (7.79)$$

显然, 存在以下三种可能的情况。

(1) $dv/d\omega = 0$, 即相速与频率无关, 这时群速等于相速, 即 $v_g = v$ 。这表明不同波长的波相速相等, 对应于这种波所传播的媒质应无色散媒质。

(2) $dv/d\omega < 0$, 即频率越高相速越小, 这时群速小于相速, 即 $v_g < v$ 。这表明波长大的波, 相速较大, 对应于这种波所传播的媒质应为正常色散媒质。

(3) $dv/d\omega > 0$, 即频率越高相速越大, 这时群速大于相速, 即 $v_g > v$ 。这表明波长小的波, 相速较大, 对应于这种波所传播的媒质应非正常色散媒质。

关于群速, 在第 10 章中还将继续讨论。

本章小结

1. 在非导电媒质中, 电磁波的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{和} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

2. 在非导电媒质中, 电磁波的传播速度 $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。

3. 在无损耗媒质中, 本征阻抗 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 。

4. 在有耗媒质中, 等效介电系数 $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i(\gamma/\omega)$ 是一个复数。

5. 有耗媒质中的本征阻抗 $\tilde{\eta} = \sqrt{\mu/\tilde{\epsilon}}$ 。

6. 引入传播系数 $\Gamma = i\tilde{k} = \alpha + i\beta$, 其中 α 是衰减常数, β 是相位常数。

7. 低密度气体的折射率 $n \approx 1 + N\alpha_p/2$, 其中 N 为单位体积的分子数, α_p 是在第 3 章研究简单模型时已定义过的分子极化率。

8. 高密度、非极化、均匀、各向同性、绝缘介质的折射率 n 由克劳休斯-莫索提方程确定, 即

$$\frac{3(n^2 - 1)}{n^2 + 2} = N\alpha_p$$

这个方程适用于非极化气体和液体。

9. 折射率的复数形式为

$$n = n_r - in_i$$

当波在介质中传播时, 其虚部使波的幅值按照指数规律 $\exp(-\omega z n_i/c)$ 衰减, 它在分子的谐振频率附近取得极值。在谐振频率附近的频率范围内, 介质中的电磁波辐射的色散是非正常的, 并且波的相速大于光速 c ; 在非正常色散区域内, 介质将使穿过它的电磁波的衰减程度最大。

10. 群速 $v_g = d\omega/dk$, 对于既色散又耗散的介质, 群速概念的应用受到限制。

习 题 7

7.1 在第3章中, 高密度介质中局部场的洛伦兹表达式是在静态场的情况下推导出来的。而在假定波长足够长, 可以包含相当数量的分子波长的情况下, 它就可以扩展应用于时变场。如果我们将10个分子直径的距离认为是“近邻”, 并规定其中场的最大变化量不得超过峰值的5%, 请在小分子的直径为 2×10^{-10} m的条件下, 对频率上限的数量级做出估计。

7.2 试证明: 如果色散介质远离非正常色散区($n_i \rightarrow 0$), 则群速与相速的乘积就等于 c^2 。

7.3 在 $\mu_r = 1$ 、 $\varepsilon_r = 4$ 、 $\gamma = 0$ 的媒质中, 有一均匀平面波, 其电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \sin(\omega t - kz + \pi/3)$ (V/m), 若已知平面波的频率 $f = 150$ MHz, 任意点的平均功率密度为 $0.265 \mu\text{W}/\text{m}^2$ 。试求: (1) 电磁波的波数、相速、波长、波阻抗; (2) $t=0$ 、 $z=0$ 时的电场 $|\mathbf{E}(0,0)|$ 等于多少? (3) 经过 $t = 0.1 \mu\text{s}$ 后, 电场 $|\mathbf{E}(0,0)|$ 值传到什么位置?

7.4 空气中某一均匀平面波的波长为12 cm, 当该平面波进入某无损耗媒质中传播时, 其波长减小为8 cm, 且已知在媒质中的 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的振幅分别为50 V/m和0.1 A/m。求该平面波的频率和无损耗媒质的 μ_r 与 ε_r 。

7.5 在自由空间中, 某电磁波的波长为0.2 m, 当该波进入到理想电介质后, 波长变为0.09 m, 设 $\mu_r = 1$, 试求 ε_r 及波在该介质中的波速。

7.6 理想介质中均匀平面波的电场和磁场分别为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 10 \cos(6\pi \times 10^7 t - 0.8\pi z) \text{ (A/m)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \frac{1}{6\pi} \cos(6\pi \times 10^7 t - 0.8\pi z) \text{ (A/m)}$$

求介质的 μ_r 与 ε_r 。

7.7 频率为150 MHz的均匀平面波在损耗媒质中传播, 已知 $\mu_r = 1$ 、 $\varepsilon_r = 1.4$ 、 $\gamma/\omega\varepsilon = 10^{-4}$, 问波在该媒质中传播几米后, 波的相位改变 90° ?

7.8 非磁性良导体中, 波速为真空中光速的1/1000, 波长为0.3 mm, 求导体的电导率和波的频率。

7.9 试推导出式(7.41)和式(7.42)。

7.10 一个均匀平面波在 $z=0$ 平面内 $\mathbf{E} = i20\mathbf{e}_x$ (mV/m), 角频率 $\omega = 2 \times 10^6$ rad/s, 媒质参数为 $\mu_r = 10$ 、 $\varepsilon_r = 2.5$ 、 $\gamma = 10^{-4}$ (S/m), 试求衰减常数 α 、相位常数 β 、波长 λ 、相速 v 、本征阻抗 $\tilde{\eta}$ 及 $t = 6 \mu\text{s}$ 和 $z = 10$ m时的电场 \mathbf{E} 。

7.11 一个平面波的角频率 $\omega = 10^8$ rad/s, 电场强度 $\mathbf{E} = 7500\mathbf{e}^{i30^\circ} \mathbf{e}^{-(\alpha+i\beta)z}$ (V/m), 媒质参数为 $\mu = 5 \mu\text{H}/\text{m}$ 、 $\varepsilon = 20 \text{ pF}/\text{m}$ 、 $\gamma = 10 \mu\text{S}/\text{m}$ 。试写出磁场强度 \mathbf{H} 的表达式及 $t = 100 \text{ ns}$ 和 $z = 20$ m时的磁场强度的大小。

7.12 均匀平面波在无损耗媒质中传播, 频率500 kHz, 复数振幅 $\mathbf{E} = 4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$ (kV/m), $\mathbf{H} = 6\mathbf{e}_x + 18\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z$ (A/m), 试求: (1) 波的传播方向的单位矢量; (2) 波的平均功率密度; (3) 设 $\mu_r = 1$, 那么 ε_r 等于多少?

7.13 两平面波的电场分别为 $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}^{-i\frac{\omega_1}{c}z} \mathbf{e}_x$ (V/m)和 $\mathbf{E}_2 = E_2 \mathbf{e}^{-i\frac{\omega_2}{c}z} \mathbf{e}_x$ (V/m), 它们同时在一个媒质中传播, 若 $\omega_1 \neq \omega_2$, 试证明: 在媒质中任一点处总的平均功率密度等于两者的平均功率密度之和。

7.14 一个 $f = 3 \text{ GHz}$ 、 y 方向极化的均匀平面波, 在 $\varepsilon_r = 2.5$ 、损耗正切为 10^{-2} 的非磁性媒质中沿正 x 方向传播, 试求: (1) 波的振幅衰减一半时, 传播了多少距离? (2) 媒质的本征阻抗、波长和相速; (3) 设在 $x=0$ 处的 $\mathbf{E} = 50 \sin(6\pi \times 10^9 t + \pi/3) \mathbf{e}_y$ (V/m), 写出 $\mathbf{H}(x,t)$ 的表达式。

7.15 设湿土壤的电导率 $\gamma = 0.001 \text{ S/m}$ 、 $\varepsilon_r = 10$ ，试分别求出频率为 1 MHz 和 10 MHz 的电磁波进入土壤后的传播速度、波长和振幅衰减到 $1/10^6$ 的距离。

7.16 已知海水的电导率 $\gamma = 4 \text{ S/m}$ 、 $\varepsilon_r = 81$ ，试分别求出频率为 1 MHz 和 100 MHz 的电磁波在海水中传播时的波长、衰减常数和波阻抗。

7.17 频率为 159 MHz 的平面波在有损耗媒质中传播，媒质的参数为 $\mu_r = 1$ 、 $\varepsilon_r = 1$ 、 $\gamma = 10^5 \text{ S/m}$ ，问波传播多少距离后振幅减小到初始值的 $1/e^2$ ？

7.18 已知海水的电参数为 $\varepsilon_r = 81$ 、 $\mu_r = 1$ 、 $\gamma = 5 \text{ S/m}$ ，若要求进入海水的电磁波功率至少有 90% 能到达 1 m 以下深度，问电磁波的频率应为多少？

7.19 均匀平面波从空气射入海水中，空气中的 $\lambda_0 = 600 \text{ m}$ ，海水的 $\gamma = 4.5 \text{ S/m}$ ， $\varepsilon_r = 80$ ， $\mu_r = 1$ ，试求：(1) 海水中的波长 λ 和波速 v ；(2) 已知在海平面下 1 m 深处的电场 $E_x = 10^{-6} \cos \omega t \text{ (V/m)}$ 时，海平面处的电场和磁场。

7.20 波长 $\lambda = 10 \text{ m}$ 的电磁波，在某种媒质中的相速 $v_p = 2 \times 10^7 \sqrt[3]{\lambda} \text{ (m/s)}$ ，求其群速 v_g 。

第 8 章 导电介质中的电磁波

电磁波的传播特性与介质密切相关，本章首先对导电介质的一般模型进行了讨论，并根据模型描述了导电介质的频率特性。通过对频率特性的分析可以发现，电磁波在导电介质中传播时会产生所谓的趋肤效应。本章所讨论的电磁波在导电介质中的传播情况仍然立足于均匀平面电磁波的情况，从不同角度的分析结果来看，电磁波在导电介质中传播时会由于场的幅度衰减和磁场的相位滞后等原因，引起电磁波在传输过程中的形状发生畸变。本章最后运用导电介质模型讨论了等离子体对波的反射问题。

8.1 导电介质的一般模型

在第 3 章中，我们讨论过描述分子或原子中的电荷特性的一般模型，现在将对该模型稍加修改，以使其能够适用于导电介质。已知在电场的作用下，原子中电荷的移动可用如下的受力方程描述：

$$qE_x = m \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x \right) \quad (8.1)$$

式中， m 为电荷 q 的质量； α 是电荷移动的衰减常数； ω_0 是电荷的自然角频率。

在第 7 章中曾经指出，由上述模型可以得出低密度介质的折射率为

$$n^2 = 1 + \frac{Nq^2/m\epsilon_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\alpha\omega} \quad (8.2)$$

式中， N 为每单位体积中电荷 q 的数量； ω 是测量角频率。

从前面的讨论中已经知道，式(8.2)仅仅适用于气体，而对于密度较高的物质，如液体或固体，由于其中分子极化形成偶极子从而产生局部场的原因，上述结论需要修改。但是，本章所描述的导电介质分子或原子中的自由电荷不可能发生极化，因而对于高密度的导电介质来说，式(8.2)不需要修改。另一方面，由于自由电荷没有被束缚在原子周围，所以不存在正比于位移的恢复力，同时这些电荷在原子内部也没有自然频率或谐振频率。于是，为了利用上述一般模型来描述导电介质，应在式(8.1)中令 $\omega_0 = 0$ ，即有

$$qE_x = m \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial x}{\partial t} \right) \quad (8.3)$$

同时，由式(8.2)可以得出导电介质折射率的平方为

$$n^2 = 1 + \frac{Nq^2/m\epsilon_0}{-\omega^2 + i\alpha\omega} \quad (8.4)$$

现在，我们来建立这些微观模型参数与导电的电导率 γ 这一宏观参数之间的关系。已知对于各向同性的导体，电流与场成正比。运用欧姆定理，电流密度 \mathbf{J} 可写成

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (8.5)$$

在一维坐标中, 则有

$$J_x = \gamma E_x \quad (8.6)$$

如果电荷在 x 方向的平均运动速度为 \bar{v}_x , 那么电流则为

$$J_x = Nq\bar{v}_x \quad (8.7)$$

稳恒电流受两个相反因素的影响: ①场加速电荷的移动; ②与晶格的碰撞减缓电荷的移动。电流得以稳恒是这两种影响平均后的结果, 也就是说, 其平均加速度为零。对于单个的电荷, 已有式(8.3):

$$qE_x = m \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

由于平均加速度为零, 即 $\partial^2 x / \partial t^2 = 0$, 再利用平均速度的概念, $\bar{v}_x = \partial x / \partial t$, 所以又有

$$qE_x = m\alpha\bar{v}_x \quad (8.8)$$

由式(8.6)、式(8.7)和式(8.8), 可得

$$\gamma = \frac{J_x}{E_x} = Nq \frac{\bar{v}_x}{E_x} = \frac{Nq^2}{m\alpha}$$

或

$$\gamma = Nq^2\tau/m \quad (8.9)$$

式中, 常数 τ 是衰减常数 α 的倒数 ($\tau = 1/\alpha$), 引入它的目的是为了后续方程的表述简便。

式(8.9)便是可测量的宏观量——导电介质的电导率 γ 与导电介质一般模型中参数之间的关系。下节将介绍通过导电介质模型可以揭示它的哪些特性。

8.2 导电介质在高频或低频时的特性

8.2.1 介质的折射率与导电介质的频率特性

从第7章的分析可知, 介质的复数折射率的实部决定了波的速度, 而虚部则使波的幅值按指数规律衰减, 虚部值越大, 波的衰减就越快。即折射率的虚部 n_i 决定了波穿过介质时被衰减的程度, 因此当研究电磁波在导电介质中的传播问题时, 要求出该导电介质的 n_i 值。从式(8.4)可知, 导电介质的模型与频率 ω 有关, 所以 n_i 值也反映了导电介质的频率特性。

已知复数折射率表示为

$$n = n_r - in_i$$

$$\text{则有} \quad n^2 = n_r^2 - n_i^2 - 2in_r n_i \quad (8.10)$$

在导电介质的表达式(8.4)中, 可将复数折射率平方的表达式分为实部和虚部两部分, 即

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{\gamma/\varepsilon_0}{-\omega^2\tau + i\omega} = 1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0} \right) \frac{(-\omega^2\tau - i\omega)}{(\omega^4\tau^2 + \omega^2)} \\ &= 1 - \frac{\gamma\tau/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)} - i \frac{\gamma/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)\omega} \end{aligned} \quad (8.11)$$

由式(8.10)和式(8.11)可得

$$n_r^2 - n_i^2 = 1 - \frac{\gamma\tau/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)} \quad (8.12)$$

并且

$$2n_r n_i = \frac{\gamma/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)\omega}$$

即

$$n_r = \frac{\gamma/2\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)\omega} \left(\frac{1}{n_i} \right) \quad (8.13)$$

将 n_r 代入式(8.12), 可得

$$\left[\frac{\gamma/2\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)\omega} \left(\frac{1}{n_i} \right) \right]^2 - n_i^2 = 1 - \frac{\gamma\tau/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)}$$

即

$$n_i^4 + \left[1 - \frac{\gamma\tau/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)} \right] n_i^2 - \left[\frac{\gamma/2\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)\omega} \right]^2 = 0 \quad (8.14)$$

为了简单起见, 设

$$1 - \frac{\gamma\tau/\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)} = k_r \quad (8.15)$$

及

$$\frac{\gamma/2\varepsilon_0}{(\omega^2\tau^2 + 1)\omega} = k_l \quad (8.16)$$

于是式(8.14)就变为

$$n_i^4 + k_r n_i^2 - k_l^2 = 0$$

解得

$$n_i^2 = \frac{-k_r \pm \sqrt{k_r^2 + 4k_l^2}}{2}$$

于是有

$$n_i = \pm \left[\frac{-k_r \pm \sqrt{k_r^2 + 4k_l^2}}{2} \right]^{1/2}$$

因为仅当 n_i 为正值时才与波产生衰减的情况相符合, 所以取

$$n_i = \left[\frac{-k_r + \sqrt{k_r^2 + 4k_l^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (8.17)$$

式(8.17)定性地描述了导电介质的频率特性。显然, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 有 $k_l \rightarrow 0$ 和 $k_r \rightarrow 1$, 此时

$n_i \rightarrow 0$ 。这意味在这种假设模型下 $\omega \rightarrow \infty$ 的高频电磁波能够不衰减地穿过导电介质。不过, 需要说明的是, 式(8.15)和式(8.16)中存在着参数 τ , τ 是衰减系数 α 的倒数, 而从式(7.41)可知, 频率越高, 衰减系数 α 也越大 (τ 越小), 因此, 式(8.15)和式(8.16)所描述的 k_l 和 k_r 与频率 ω 的关系应该是一种非线性关系。这种非线性关系使得电磁波在导电介质中的穿透性呈现两段不同的特征, 如图8.1所示。由图可定性地看到: 一段是在低于某个频率的范围内, 随着频率的增加,

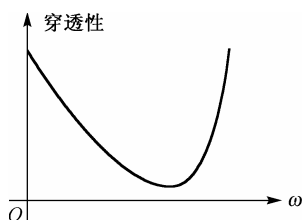


图 8.1 电磁波穿透性的定性表示

电磁波会呈现明显的衰减,从而表现出穿透性变差的情况,这时将出现所谓的趋肤效应;另一段是当频率高于某个数值后,电磁波会随着频率的增加呈现极好的穿透性。

8.2.2 导电介质的趋肤深度

8.2.1 节的分析表明,电磁波在导电介质中的穿透性是与其频率密切相关的。在描述二者之间的关系时,常常会引入一个概念——**趋肤深度(或穿透深度)**。

将电磁波的振幅衰减到 e^{-1} 时它透入导电介质的深度定义为趋肤深度,用 δ 表示,根据 δ 就可以测量出电磁波在开始明显衰减之前在导电介质中的传播距离。

由式(7.43)和式(7.44)可知,当电磁波的振幅衰减到 e^{-1} 时,应有 $\alpha\delta=1$, 所以,趋肤深度 δ 与衰减常数 α 之间的关系为

$$\delta = 1/\alpha \quad (8.18)$$

因为电磁波能量与其幅值的平方成正比,所以在经过了这个传播距离之后,辐射功率就衰减到了 $1/e^2$ 。

当介质的折射率表示为复数 $n = n_r - in_i$ 时,平面极化波中场强的表达式

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 \exp[i\omega(t - nz/c)] \quad (8.19)$$

就可改写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \exp(-\omega n_i z/c) \exp[i\omega(t - n_r z/c)] \quad (8.20)$$

由式(8.20)可得

$$\omega n_i \delta / c = 1$$

$$\text{于是} \quad \delta = c / \omega n_i \quad (8.21)$$

式(8.21)描述了趋肤深度 δ 相对于平面极化波的频率特性。

现在我们在一个很宽的频带内来做一些定量分析。为此,必须首先由式(8.17)计算出 n_i 值。以铜为例,通过铜的下列参数可以计算出其 n_i 。

铜的参数如下:电导率 $\gamma = 5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$, 原子质量 = 63.5, 密度 = $8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 阿伏加德罗常数 = $6.02 \times 10^{26} / (\text{kg 原子质量})$, 电荷量 $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 电子质量 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 绝对介电系数(真空中) $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

铜是单价元素,由于价电子被认为是自由电子,因而单位体积内的电子数目等于单位体积内的原子数目。

$$\text{每立方米的原子数目} = \frac{(8.9 \times 10^3) \times (6.02 \times 10^{26})}{63.5}$$

即每立方米的自由电子数目 $N = 8.5 \times 10^{28}$ 。

根据式(8.9)可得

$$\tau = m\gamma / Nq^2 \quad (8.22)$$

因此,铜的常数 τ 为

$$\tau = 2.4 \times 10^{-14} \text{ (s)}$$

将上述 γ 、 τ 和 ϵ_0 的值代入式(8.15)和式(8.16),可得

$$k_r = 1 - 1.56 \times 10^5 / (\omega^2 \tau^2 + 1)$$

$$k_1 = 3.25 \times 10^8 / (\omega^2 \tau^2 + 1) \omega$$

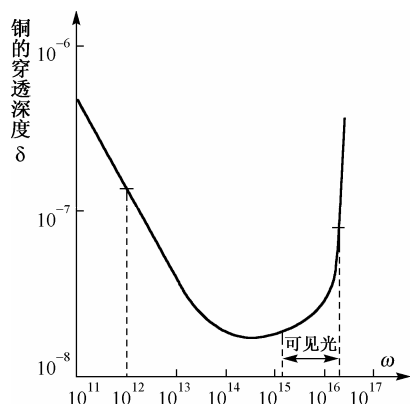


图 8.2 铜的 δ 与 ω 的函数关系

对于任意 ω 值, 均可计算出相应的 n_i , 进而计算出趋肤深度 δ 的值。铜的 δ 与 ω 的函数关系如图 8.2 所示, 为了能够在比较大的范围内看到这种函数的变化情况, 图中采用了对数坐标。由图 8.2 可知, 在低频情况下 ($\omega < 10^{12}$), 由于 n_i 的值完全取决于 k_1 , 所以 $\log \delta$ 随着 $\log \omega$ 的增加而呈线性下降。在接近可见光频率范围内, 曲线变得比较平缓, 而当达到紫外光甚至更高频率时, 曲线将急剧上升。这与一般我们所知道的紫外的电磁波可以比较容易穿透金属的事实是相符合的。即使在可见光范围内, 较薄的金属片也能允许一定量的光穿过, 但对红外频率的光波, 其穿透效果就差多了。微波频段的电磁波的穿透力较差, 其趋肤深度很小, 所以微

波波导可以用一层薄薄的银作为高导层覆盖在不良导体材料上来制成, 它足以使微波在波导中的传输过程中基本没有损失。

以上所讨论的模型可以用来分析导电介质的一般特性, 但是用它无法描述某些特殊导电介质的具体性能, 尤其是在频率很高的情况下, 还有许多影响因素在这种简单模型中都没有考虑进去。

当 $\omega < 10^{12}$ 时, n_i 的计算比较简单, 因此在频率较低的情况下, 可以简化趋肤深度 δ 的表达式。假定式 (8.15) 和式 (8.16) 中有

$$(\omega^2 \tau^2 + 1) \approx 1 \quad (8.23)$$

于是有

$$\omega \approx 1/\tau \quad (8.24)$$

则式 (8.17) 变为

$$n_i = \left[\frac{\left(\frac{\gamma \tau}{\epsilon_0} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\gamma \tau}{\epsilon_0} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega} \right)^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (8.25)$$

从式 (8.24) 所给的条件可以得到

$$\left(\frac{\gamma \tau}{\epsilon_0} - 1 \right) \approx \left(\frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

于是 n_i 的表达式就变成

$$n_i = \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0 \omega}} \quad (8.26)$$

而趋肤深度 δ 则为

$$\delta = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c^2}{\gamma \omega}} \quad (8.27)$$

式中 $\omega \approx 1/\tau$, 这意味着当计算出铜的 τ 值为 2.4×10^{-14} s 时, 只有在

$$\omega \approx \frac{1}{\tau} = \frac{10^{14}}{2.4} \quad \text{或者} \quad f \approx \frac{10^{14}}{2.4 \times 2\pi} \text{ (Hz)}$$

时才可使用式(8.27)来计算其趋肤深度 δ 。

8.2.3 导电介质的趋肤效应

导电介质通常是作为导体来使用的，但是，当交变电流通过导体时，电流密度在导体横截面上的分布将是不均匀的，并且随着电流变化频率的升高，导体上所流过的电流将越来越集中于导体的表面附近，导体内部的电流却越来越小，这种现象称为**趋肤效应**。引起趋肤效应的原因就是涡流，当交变电流通过导体时，在它的内部和周围空间就产生环状的交变磁场，而在导体内部的交变磁场激发了涡流。根据楞次定律，感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因的，所以涡流的方向在导体内部总与电流的变化趋势相反，即阻碍电流的变化。而在导体表面附近，涡流的方向却与电流的变化趋势相同。于是，交变电流不易在导体内部流动，而易于在导体表面附近流动，这就形成了趋肤效应。趋肤效应使得导体在传输高频(微波)信号时效率很低，因为信号沿它传送时衰减很大。

当然，这并不是说在高频的情况下就不能有效地传送被引导的信号了。而只是说，在这种情况下需要使用合适的传输媒质，比如第 10 章所描述的“波导”。

趋肤效应可由导电媒质的麦克斯韦方程所验证。首先推导出在导电区域的电流密度方程，然后获得载流导体的表面阻抗，证明它正比于频率的平方根。

在良导体中，位移电流远远小于传导电流，于是麦克斯韦第四方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \quad (8.28)$$

对麦克斯韦第二方程的时谐形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

两端取旋度，有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$

即

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$

由于良导体内部不包含任何静电荷，故 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，同时将式(8.28)代入上式，则有

$$\nabla^2 \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{J} \quad (8.29)$$

在导电媒质中， $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ ，代入式(8.29)可得

$$\nabla^2 \mathbf{J} = i\omega\mu\gamma\mathbf{J} \quad (8.30)$$

式(8.30)就是导电媒质中电流密度 \mathbf{J} 的一般波动方程。实际上，它就是决定导体内涡流的方程。

下面我们来讨论在导电介质中 \mathbf{J} 的分布情况。如图8.3所示，将载流导体置放在 $y \geq 0$ 的区域。假设导体在 x 方向的长度为 l ，总电流 I 在 z 方向以电流密度 \mathbf{J} 的形式分布。在 $y=0$ 处， $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ ；在 $y < 0$ 处， $\mathbf{J} = 0$ (介质区)。

为了维持导体内的有限电流 I ， $y \rightarrow \infty$ 时， $\mathbf{J} \rightarrow 0$ 。电流密度 \mathbf{J} 必须只是 y 的函数，因为它在 x 方向均匀分布。式(8.30)在笛卡儿坐标系中可写成

$$\nabla^2 \mathbf{J}_z(y) = i\omega\mu\gamma\mathbf{J}_z(y) \quad (8.31)$$

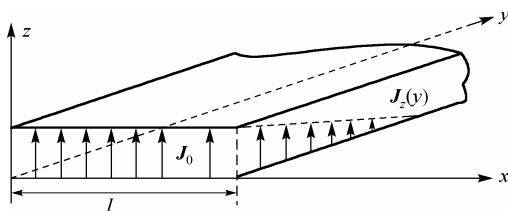


图 8.3 载流导体的电流密度分布

$$\text{即} \quad \partial^2 J_z / \partial y^2 = i\omega\mu\gamma J_z \quad (8.32)$$

由于 J_z 对 y 的两阶导数中依然出现 J_z ，因此 J_z 一定是指数型函数。所以，波动方程式(8.32)的通解为

$$J_z(y) = Ae^{-\sqrt{i\omega\mu\gamma}y} + Be^{\sqrt{i\omega\mu\gamma}y} \quad (8.33)$$

已知 J 从 $y=0$ 处的 J_0 减小至 $y=\infty$ 处的 0，因而 $A=J_0$ ， $B=0$ 。这样，导体内的电流分布为

$$J_z(y) = J_0 e^{-\sqrt{i\omega\mu\gamma}y} = J_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y} e^{i\varphi} \quad (8.34)$$

式中， $\alpha = \beta = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}$ ； $J_0 = J_0 e^{i\varphi}$ ； $J_z(y) = J_0 e^{-\alpha y}$ 按照指数衰减(见图 8.3)。式(8.34)的定义表明，衰减系数 α 与频率 ω 的平方根成正比，这样它将随着频率的增加而增加。

导体内的总电流为

$$I = \int_0^l \int_0^\infty J_0 e^{-\sqrt{i\omega\mu\gamma}y} dy dx = \frac{lJ_0}{\sqrt{i\omega\mu\gamma}} = \frac{lJ_0}{\alpha + i\beta} \quad (8.35)$$

因为 $J = \gamma E$ ，所以导体内的电场强度为

$$E_z(y) = J_0 e^{-\sqrt{i\omega\mu\gamma}y} / \gamma$$

将式(8.35)代入上式，得

$$E_z(y) = \frac{I \sqrt{i\omega\mu\gamma} e^{-\sqrt{i\omega\mu\gamma}y}}{\gamma l} = \frac{I}{\gamma l} (\alpha + i\beta) e^{-\alpha y} e^{-i\beta y} \quad (8.36)$$

对于高度导电媒质，例如铜($\gamma = 5.76 \times 10^7 \text{ S/m}$)，其衰减常数 $\alpha = 15.13\sqrt{f}$ ，则即使在中等频率时衰减常数也会很大，使得场在随着 y 方向距离增加时衰减很快，极端情形时电流成为处于导体表面的电流外壳。根据这一概念，我们定义在 z 方向每单位长度的内阻抗为 $y=0$ 处的电场与电流之比。从这个定义看，内阻抗其实又可称为表面阻抗，即

$$Z_i = \frac{E_z(0)}{I} = \frac{1}{\gamma l} (\alpha + i\beta) \quad (8.37)$$

$$\text{或者} \quad Z_i = \frac{1}{\gamma l \delta} + i \frac{1}{\gamma l \delta} \quad (8.38)$$

式中， δ 是 8.2.2 节中定义过的趋肤深度。这里，再一次验证了

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \quad (8.39)$$

其次，从式(8.38)可知，内阻抗包括一个内电阻和一个内电感，即

$$R_i = \frac{1}{\gamma l \delta} \quad (8.40)$$

$$L_1 = \frac{1}{\gamma l \delta \omega} \quad (8.41)$$

通过计算可以得知,在频率为 10 kHz 时,铜的趋肤深度为 0.66 mm;在频率为 10 MHz 时,铜的趋肤深度为 0.02 mm。于是,在频率为 10 MHz 时,当经过 0.1 mm (5δ) 距离后,铜内的场几乎已消失。事实上,在透入 5δ 的距离后,场强将小于其表面初始值的 1%,功率将小于最初的 0.01%。

8.3 导电介质中的电磁波

8.3.1 导电介质中波的传播特性

从以上分析可知,导电介质是有损耗的介质,那么 7.3 节中所得出的公式和结论也应该适用于本节所讨论的内容。如果我们仍然只讨论向着 z 方向传播的电磁波,并且场分量是只有 E_x 和 H_y 的最简单情况,则其一维波动方程的解仍为式 (7.43) 和式 (7.44) 所描述的结果,即

$$H_y = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-ikz} = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-\Gamma z} = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-(\alpha+i\beta)z} = \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \quad (8.42)$$

$$E_x = E_0 e^{-ikz} = E_0 e^{-\Gamma z} = E_0 e^{-(\alpha+i\beta)z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \quad (8.43)$$

由式 (8.43) 可写出电场的瞬时表达式为

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (8.44)$$

而由于有耗媒质中的复本征阻抗 $\tilde{\eta}$ 为

$$\tilde{\eta} = \frac{\omega\mu}{\tilde{k}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}}} = |\tilde{\eta}| e^{i\theta} \quad (8.45)$$

其模和幅角分别为

$$|\tilde{\eta}| = \eta \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{-1/4} \quad (8.46)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \quad (8.47)$$

所以可得到磁场的瞬时表达式为

$$H_y = \frac{E_0}{|\tilde{\eta}|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta) \quad (8.48)$$

电磁波的瞬时坡印廷矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\mathbf{e}_x E_x) \times (\mathbf{e}_y H_y) \\ &= \mathbf{e}_z \frac{E_0^2}{|\tilde{\eta}|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta) \end{aligned} \quad (8.49)$$

平均坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{e}_x E_x) \times (\mathbf{e}_y H_y^*) \right] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2|\tilde{\eta}|} E_0^2 e^{-2\alpha z} \cos \theta \quad (8.50)$$

电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z) \quad (8.51)$$

其平均值为

$$[w_e]_{av} = \frac{1}{4} \varepsilon E_0^2 e^{-2\alpha z} \quad (8.52)$$

磁场能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \frac{E_0^2}{|\tilde{\eta}|^2} e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z - \theta) \quad (8.53)$$

其平均值为

$$[w_m]_{av} = \frac{1}{4} \mu \frac{E_0^2}{|\tilde{\eta}|^2} e^{-2\alpha z} \quad (8.54)$$

根据以上各式,可知导电介质中的平面电磁波具有如下特点:

(1) 导电媒质内的平面电磁波在电场方向、磁场方向与传播方向上的对应关系与理想电介质中的电磁波相同,仍然是平面电磁波。

(2) 沿着电磁波的传播方向,例如 z 方向,电场和磁场的幅值随 z 的增加按指数 $e^{-\alpha z}$ 衰减。衰减的原因是由于媒质中的电流产生焦耳热损耗,使电磁场的传播能量逐渐减小。从衰减系数 α 的表达式(7.41)可知,当角频率一定时,媒质的电导率 γ 越大,衰减系数 α 就越大,电磁波的幅度衰减就越快。而在理想电介质中,平面电磁波的场幅度是与 z 无关的常量。

(3) 由平均坡印廷矢量的表达式(8.50)可得

$$dS_{av}/dz = -2\alpha S_{av}$$

所以

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{-dS_{av}/dz}{S_{av}} \quad (8.55)$$

由式(8.55)可知, α 的物理意义为平均能流密度对距离的相对减少率的 $1/2$ 。

衰减系数 α 的单位是 Np/m (奈贝/米), Np 是一个很大的单位,工程上常用 dB (分贝) 作为衰减量的单位,并且

$$1\text{Np} = 20\lg e \text{ dB} = 8.686 \text{ dB} \quad (8.56)$$

(4) 磁场在相位上比对应的电场有一个滞后角 θ , 从式(8.47)可以看出,当角频率 ω 一定时, θ 随着媒质电导率 γ 的增大而增大,最大可达 $\pi/4$ 。而在理想电介质中,电场与对应的磁场是同相位的。图7.2定性描述了电磁场幅度的衰减和磁场的相位滞后情况,这是引起电磁波在传输过程中形状发生畸变的原因。

(5) 由第7章的分析可知,导电媒质中电磁波的相速 v 由相位系数 β 和角频率 ω 共同决定,即

$$v = dz/dt = \omega/\beta \quad (8.57)$$

将式(7.42)代入式(8.57),可得

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}} \quad (8.58)$$

式(8.58)表明,电磁波传播的相速与频率有关,故导电媒质是色散媒质。

(6) 从式(8.51)~式(8.54)可知,导电媒质中电场能量密度和磁场能量密度是不等的。比如,对于平均能量密度,因为 $\mu/\varepsilon \neq |\tilde{\eta}|^2$,所以

$$[w_e]_{av} \neq [w_m]_{av}$$

例8.1 已知海水的电磁参数为 $\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$, $\gamma = 4 \text{ S/m}$, 求频率分别为 1 kHz、1 MHz、100 MHz 和 10 GHz 时,平面电磁波在海水中的衰减常数 α 、相位常数 β 、相速 v 及功率流密度下降到 10^{-6} 的绝对距离 l 和相对距离 l/λ_0 。

解: 由式(7.41)和式(7.42)可得

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} = 2\pi f \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_0\varepsilon_r} \right)^2} - 1 \right]} \\ &= 1.334 \times 10^{-7} f \sqrt{\left[\sqrt{1 + \frac{7.88 \times 10^{-17}}{f^2}} - 1 \right]} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2} + 1 \right]} = 2\pi f \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_0\varepsilon_r} \right)^2} + 1 \right]} \\ &= 1.334 \times 10^{-7} f \sqrt{\left[\sqrt{1 + \frac{7.88 \times 10^{-17}}{f^2}} + 1 \right]}\end{aligned}$$

并且

$$\lambda_0 = c/f \approx 3 \times 10^8 / f$$

$$v = \omega/\beta \approx 2\pi f/\beta$$

$$|S_{av}(l)| = \frac{1}{2|\tilde{\eta}|} E_0^2 e^{-2\alpha l} \cos\theta = |S_{av}(0)| e^{-2\alpha l}$$

所以

$$l = -\frac{1}{2\alpha} \ln \frac{|S_{av}(l)|}{|S_{av}(0)|} = -\frac{1}{2\alpha} \ln 10^{-6} \approx \frac{6.91}{\alpha}$$

将频率值代入上面各式, 所得结果如表 8.1 所示。

表 8.1 不同频点的各项参数值

f	1 kHz	1 MHz	100 MHz	10 GHz
λ_0/m	3×10^5	3×10^2	3	3×10^{-2}
$\alpha/(\text{Np/m})$	0.1257	3.9720	37.5700	83.6500
$\beta/(\text{rad/m})$	0.1257	3.92770	42.0400	1.8880×10^3
$v/(\text{m/s})$	5.00×10^4	1.58×10^6	1.49×10^7	3.33×10^7
l/m	54.980	1.740	0.184	0.083
l/λ_0	1.833×10^{-4}	5.800×10^{-3}	6.130×10^{-2}	2.770

从表 8.1 中的结果可以看出: 海水中电磁波的传播速度随频率的升高而增大, 但明显小于真空中电磁波的传播速度; 功率衰减量的绝对深度 l 随频率升高而减小, 这预示着海水中的电

场通信和目标探测应采用较低的工作频率;但其相对的衰减深度 l/λ_0 却随着频率升高而增大,这预示着海水表面对电磁波的反射作用将随频率升高而减弱。

8.3.2 良导体中的均匀平面电磁波

由以上的分析和例 8.1 可知,导电媒质中平面电磁波的性质主要由参数 α 、 β 和 θ 决定,而这几个参数的表达式中都含有因子 $\gamma/\omega\varepsilon$,令

$$Q = \omega\varepsilon/\gamma \quad (8.59)$$

式(8.59)可写成

$$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\gamma} = \frac{\omega\varepsilon E_x}{\gamma E_x} = \frac{J_{dx}}{J_{cx}} \quad (8.60)$$

可见, Q 值实际上是位移电流密度与传导电流密度的幅度比值,它表明了介质的导电性与介质性的比例关系。

当 $Q \gg 1$ (一般取 $Q > 100$)时,媒质中的位移电流密度远大于传导电流密度,媒质特性与理想电介质比较接近,电磁波的衰减损耗较弱,这样的媒质称为低损耗媒质,此时的各项参数为

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{Q}\right)^2} - 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{Q}\right)^2 - 1 \right]} \\ &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{2Q} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{Q}\right)^2} + 1 \right]} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \\ v &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \\ \tilde{\eta} &= \frac{\omega\mu}{\tilde{k}} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - i\frac{1}{Q}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ \theta &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{Q} \approx 0 \end{aligned}$$

根据以上参数的表达式,可以更进一步得知低损耗媒质中的平面波具有如下性质。

(1) 电导率 γ 对相位常数的影响可以忽略, β 的表达式与理想电介质的相同。电磁波的相速基本上与频率无关,可以近似为非色散介质。

(2) 衰减常数 α 比较小,因而电磁波幅度的衰减缓慢。以纯净水为例,当频率 $f = 10 \text{ MHz}$ 时, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon_r \approx 78.2$, $\gamma = 2 \times 10^{-4} \text{ S/m}$,代入上面的公式可得

$$\begin{aligned} Q &= \omega\varepsilon/\gamma \approx 434.6 \\ \alpha &= \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 4.26 \times 10^{-3} \text{ (Np/m)} \end{aligned}$$

将 α 代入幅度衰减因子 $e^{-\alpha z}$ 可知,电磁波前进1 m,场幅度仅衰减4%左右。而对于传输电缆中常用的低损耗介质材料,如聚乙烯和聚四氟乙烯塑料等,其电导率非常低,按照上面公式计算的衰减常数一般小于 10^{-10} ,故电导率所引起的衰减非常小,可以忽略不计。

(3) 波阻抗 $\tilde{\eta}$ 近似为实数, $\theta \approx 0$,电场与磁场几乎同相位,与理想介质中的情况近似。

当 $Q \ll 1$ (一般取 $Q < 0.1$)时,媒质中的传导电流密度远大于位移电流密度。由于焦耳损耗很大,电磁波的幅度衰减非常快。此时的各项参数为

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + (1/Q)^2} - 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2Q}} = \frac{1}{\sqrt{2/\omega\mu\gamma}} = \frac{1}{\delta}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + (1/Q)^2} + 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2Q}} = \frac{1}{\delta}$$

式中, δ 是趋肤深度。

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{1/\delta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\omega\mu}{\tilde{k}} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - i\frac{1}{Q}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{-\frac{Q}{i}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{i\pi/4}$$

对于金属类的良导体,电导率 γ 一般为 $10^5 \sim 10^7$ 数量级,若取 $\mu = \mu_0$,则在频率较高的波段内,如常用的广播电视和雷达频率($f = 10^5 \sim 10^{10}$ Hz),趋肤深度 δ 一般只有毫米甚至微米量级,相位常数 β 和衰减常数 α 都具有很大的数值。此时的电磁波具有如下特点。

(1) 很小的 δ 值使良导体内电磁波的传播速度 v 远小于真空中的电磁波速度 c ,并且速度 v 与频率有关。以上面的数据为例, v 约比 c 低4~6个数量级。又由 $\lambda = v/f$ 的关系可知,导体内的波长 λ 也比同频率的真空波长 λ_0 低同样的数量级。

(2) 很大的 α 值使得电场和磁场的幅度衰减很快。由幅度衰减因子 $e^{-\alpha z}$ 可知,电磁波每前进一个趋肤深度 δ 的距离,场幅度就要减小63%左右;若前进 6δ 的距离,场幅度大约下降到原来的1/500。由于良导体的趋肤深度只有毫米甚至微米数量级,因此当电磁波进入良导体后,将主要趋附于导体的表层上。

(3) 波阻抗 $\tilde{\eta}$ 的相角 $\theta \approx \pi/4$,表明磁场比对应电场的相位滞后约 $\pi/4$ 。因此,在同一场点上,电场达到最大值的1/8周期后,磁场才达到最大值。换言之,在同一时刻,磁场矢端曲线比电场矢端曲线落后 $\lambda/8$ 。

(4) 波阻抗 $\tilde{\eta}$ 很小,以铜为例,电导率 $\gamma \approx 5.8 \times 10^7$ S/m,当频率 $f = 10^5$ Hz时, $|\tilde{\eta}| \approx 1.16 \times 10^{-4} \Omega$,远小于真空中的波阻抗 377Ω 。因此,在良导体中,磁场占有主要地位,磁场能量远大于电场能量。

(5) 尽管良导体中的电场相对较小,但由于导体的电导率很大,所以也会产生很大的传导电流,其传导电流密度的复振幅为

$$J_x(z) = \gamma E_x(z) = \gamma E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}$$

若将坐标 z 的零点选在导体表面处,则

$$J_x(0) = \gamma E_0$$

这就是 $z=0$ 处导体一侧的电流密度, 代入上式, 得到导体内 z 点处的电流密度为

$$J_x(z) = J_x(0)e^{-\alpha z}e^{-i\beta z} = J_x(0)e^{-ikz} \quad (8.61)$$

式(8.61)表明, 导体内的传导电流也像电场和磁场一样, 幅度很快衰减, 从而形成主要集中在导体表层内侧一个很薄的区域内的趋肤现象, 并且频率越高, 区域越薄, 趋肤效应越强烈。

这种关系如图8.4所示。

这种主体集中在导体表层的体电流对场的作用与一个导体面上的理想面电流近似, 为此, 可将它“压缩”到导体表面上, 等效成一个表面电流密度 J_{sx} , 这可以使工程上的近似计算大为简化。所谓“压缩”就是对导体内的电流密度 $J_x(z)$ 从 0 到 ∞ 积分, 即

$$J_{sx} = \int_0^{\infty} J_x(0)e^{-ikz} dz = \frac{J_x(0)}{ik} \quad (8.62)$$

可以证明, 这个等效的表面电流密度恰好等于导体表面处的磁场强度 $H_y(0)$, 即

$$H_y(0) = \frac{E_x(0)}{\tilde{\eta}} = \frac{E_x(0)}{\sqrt{\omega\mu/\gamma}e^{i\pi/4}} = \frac{J_x(0)}{\gamma\sqrt{\omega\mu/\gamma}e^{i\pi/4}} = \frac{J_x(0)}{ie^{-i\pi/4}\sqrt{\omega\mu\gamma}}$$

对良导体, 有

$$\tilde{k} = \beta - i\alpha = \frac{\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} - i\frac{\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} = \sqrt{\omega\mu\gamma}e^{-i\pi/4}$$

所以

$$H_y(0) = \frac{J_x(0)}{ik}$$

因此有

$$J_{sx} = H_y(0)$$

此表面电流密度的方向与电场矢量的方向相同, 为 \mathbf{e}_x 方向, 磁场为 \mathbf{e}_y 方向, 而导体表面的法向矢量为 $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$, 由此可得表面电流密度与表面磁场矢量之间的关系表达式为

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}(0) \quad (8.63)$$

这一矢量关系也适用于电磁波的入射方向与导体表面不垂直的任意情况。

除了 $\gamma \rightarrow \infty$ 的理想导体外, 实用导体内只有体电流而不存在实际的表面电流。因此, 对实用导体而言, 磁场边界条件 $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$ 中等式右边应为零。于是可知, 导体表面内、外侧的磁场应该相等, 即

$$\mathbf{H}(0_-) = \mathbf{H}(0_+) \quad (8.64)$$

因此, 式(8.63)中的 $\mathbf{H}(0)$ 既可以是导体表面内侧的磁场, 也可以取成导体表面外侧的磁场。由于外侧磁场计算或测量要相对容易, 所以在实际应用中多以外侧磁场来计算等效表面电流密度。但必须注意, 这个外侧磁场是外侧的总磁场, 它应该等于入射波磁场与导体表面的反射波磁场在表面外侧的叠加。在后面将看到, 对于良导体, 这个总磁场近似等于入射波磁场的两倍。

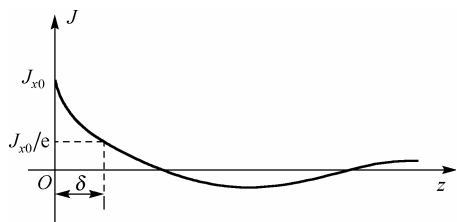


图 8.4 传导电流的趋肤现象

(6) 良导体中的平均功率流密度为

$$\begin{aligned} S_{av} &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu}} e^{i\pi/4} E_0 e^{-\alpha z} e^{i\beta z} \right) \\ &= \mathbf{e}_z \frac{1}{2} H_0^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{\omega\mu/2\gamma} \end{aligned}$$

在 $z=0$ 的导体一侧, 有

$$[S_{av}]_{z=0} = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} H_0^2(0) \sqrt{\omega\mu/2\gamma} = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} J_{sx}^2 R_s \quad (8.65)$$

在许多问题中, 进入导体的功率往往就是损耗功率, 可利用式(8.65)进行计算。其中的 J_{sx} 是导体的等效表面电流密度, $R_s = \sqrt{\omega\mu/2\gamma}$ 称为导体的表面电阻, 实际上它就是良导体波阻抗的实部, 而波阻抗的虚部记为 $X_s = \sqrt{\omega\mu/2\gamma}$, 也称为表面电抗, $Z_s = R_s + iX_s$ 称为导体的表面阻抗。

8.4 等离子体对波的反射

前面所讨论的导电介质模型同样适用于强电离气体, 即等离子体。等离子体是除气体、液体和固体以外的第四种物态, 它是由电子、负离子、正离子和未电离的中性分子组成的混合物。

等离子体中总的正、负电量相等, 因此对外呈现中性。与导体相比, 其电子浓度远远小于导体中自由电子的浓度。在外场作用下, 等离子体中电子和离子作定向运动形成运流电流。对于频率很高的外加电磁场, 由于原子和离子的质量比电子的质量大得多, 因此可近似认为原子和离子是不动的, 运流电流仅由电子运动所引起, 也就是说, 等离子体的电特性将主要取决于自由电子的运动。

环绕在地球周围的电离层能把电波反射回地球, 所以它对于无线通信来说非常重要。有了电离层, 便可以接收到遥远电台发出的信号, 不过这些信号是在地球和电离层之间经过多次反射后才到达的。能够被电离层反射必须具备一定的条件, 这些条件可以从折射率的实部和斯涅耳定律中得出, 见例 8.2。而折射率的虚部则可完全按照类似于 8.2 节中推导导电介质的折射率虚部的方法得到。

例 8.2 试证明: 在高频($\omega \gg 1/\tau$ 或 $\omega \gg \alpha$) 情况下, 导电介质或强导电等离子体的折射率的实部 n_r 为

$$n_r = \sqrt{1 - \frac{\gamma\tau}{\varepsilon_0(\omega^2\tau^2 + 1)}} = \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega^2}}$$

证明: 从式(8.12)和式(8.13)可以得出关于 n_r 的方程为

$$n_r^4 - \left[1 - \frac{\gamma\tau}{\varepsilon_0(\omega^2\tau^2 + 1)} \right] n_r^2 - \left[\frac{\gamma}{2\varepsilon_0\omega(\omega^2\tau^2 + 1)} \right]^2 = 0$$

将上式改写为

则

$$n_r^4 - k_r n_r^2 - k_l^2 = 0$$

$$n_r^2 = \frac{k_r \pm \sqrt{k_r^2 + 4k_l^2}}{2}$$

由于 n_r^2 必为正值, 所以

$$n_r^2 = \frac{k_r + \sqrt{k_r^2 + 4k_l^2}}{2}$$

故有

$$n_r = \left[\frac{k_r + \sqrt{k_r^2 + 4k_l^2}}{2} \right]^{1/2}$$

比较 k_r 和 k_l 可知, 如果 $\omega \ll 1/\tau$, n_r 的值将主要取决于 k_l , 这时有

$$n_r \approx \sqrt{k_l} = \sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon_0\omega(\omega^2\tau^2 + 1)}} = \sqrt{\frac{Nq^2}{2m\alpha\varepsilon_0\omega(1 + \omega^2/\alpha^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{Nq^2\alpha}{2m\varepsilon_0\omega(\alpha^2 + \omega^2)}}$$

当 $\omega \ll \alpha$, 即 $\omega \ll 1/\tau$ 时, 上式变为

$$n_r = \sqrt{\frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0\omega\alpha}} \quad (8.66)$$

这就是在低频情况下折射率的实部。而在高频 ($\omega \gg 1/\tau$ 或 $\omega \gg \alpha$) 情况下, n_r 的值将主要取决于 k_r , 故有

$$n_r = \sqrt{k_r} = \sqrt{1 - \frac{\gamma\tau}{\varepsilon_0(\omega^2\tau^2 + 1)}} = \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\alpha^2(1 + \omega^2/\alpha^2)}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\alpha^2 + \omega^2)}}$$

在 $\omega \gg \alpha$ 的高频条件下, 上式变为

$$n_r = \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega^2}} \quad (8.67)$$

这样便得出了高频情况下 n_r 的表达式, 由此可知折射率的实部小于 1, 并且这种指数衰减波的相速将会大于光速 c (见 7.7 节所进行的讨论)。

对于反射界面比较平滑的电离层来说, 波的反射条件比较复杂。由于电离层内不同位置处的电离程度不同, 即电荷的数目 N 不同, 则 n_r 的值也将随着位置的变化而不同。在这种情况下, 反射波将随着入射波方向的逐渐变化而改变, 直到从电离层射出后为止。如图 8.5 所示, 在每一个发生偏转的位置上, 其 n_r 的值与入射角 θ_i 及折射角 θ_t 都服从斯涅耳定律 (见 9.3 节), 即有

$$n_r \sin \theta_t = \sin \theta_i \quad (8.68)$$

因此, 当 n_r 由于 N 的增大而减小时, $\sin \theta_t$ 即 θ_t 一定会增大。这样,

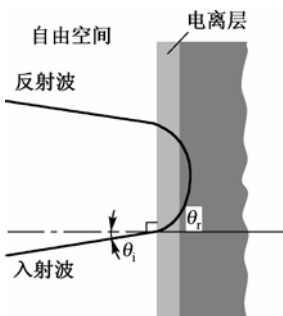


图 8.5 电离层对波的反射

就可以得出波的反射条件：如果 n_t 等于 $\sin \theta_i$ ，则 $\sin \theta_t = 1$ ， $\theta_t = 90^\circ$ ，即当

$$\sqrt{1 - \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega^2}} = \sin \theta_i, \quad \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega^2} = \cos^2 \theta_i$$

或

$$\omega = \frac{1}{\cos \theta_i} \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} \quad (8.69)$$

时，波就会反射。

当法向入射角 $\theta_i = 0$ (法向入射)，即 $\cos \theta_i = 1$ 时，就有

$$\omega = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}$$

由此得出法向入射波会发生反射的最大频率(临界频率 f_c) 为

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} \quad (8.70)$$

由于 N 取决于电离层的电离程度，所以太阳辐射量的大小将决定 N 的大小，这样 f_c 的值也将随着地球上的地点不同和时间不同而各异。这一点从日常经验就可以有所体会，例如，我们知道无线电的远距离接收效果在白天和夜晚是有很大的差异的。然而电离层的实际情况非常复杂，因为离子类型和密度都将随着地球表面上空高度的变化而改变，因而存在着情况各不相同的离子层。各处离子层及影响的不同都是因为太阳辐射的变化造成的，而太阳黑子的周期性活动又使得全球无线电的传播情况受到显著的影响。

本章小结

1. 高频电磁波能穿透金属，而低频电磁波在金属中则会被大大衰减。
2. 在低频范围内，即 $f \ll Nq^2/m\gamma$ (γ 是电导率)，趋肤深度 δ 为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\gamma \omega}}$$

3. 随着电流频率的升高，导体上所流过的电流将越来越集中于导体的表面附近，导体内部的电流却越来越小，这种现象称为趋肤效应。引起趋肤效应的原因是涡流。决定导体内涡流的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{J} = i\omega\mu\gamma\mathbf{J}$$

4. 沿着电磁波的传播方向，电场和磁场的幅值随 z 的增加按指数 $e^{-\alpha z}$ 衰减。衰减的原因是由于媒质中的电流产生焦耳热损耗，使电磁场的传播能量逐渐减小。

5. 衰减常数 α 的物理意义为平均能流密度对距离的相对减少率的 $1/2$ 。

6. 在导电介质中，磁场在相位上比对应的电场有一个滞后角 θ ，当角频率 ω 一定时， θ 随着媒质电导率 γ 的增大而增大，最大可达 $\pi/4$ 。

7. 在导电介质中，电磁波传播的相速与频率有关，故导电介质是色散介质。

8. 导电介质中电场能量密度和磁场能量密度不相等。

9. 导电介质中平面电磁波的性质主要由参数 α 、 β 和 θ 决定，这几个参数的表达式中都含有因子 $\gamma/\omega\varepsilon$ ，令 $Q = \omega\varepsilon/\gamma$ ， Q 值实际上是位移电流密度与传导电流密度的幅度比值，它

表明了介质的导电性与介质性的比例关系。

10. 当 $Q \gg 1$ (一般取 $Q > 100$) 时, 介质中的位移电流密度远大于传导电流密度, 介质特性与理想电介质比较接近。

11. 当 $Q \ll 1$ (一般取 $Q < 0.1$) 时, 介质中的传导电流密度远大于位移电流密度。由于焦耳损耗很大, 电磁波的幅度衰减非常快。

12. 导体内的传导电流也像电场和磁场一样, 幅度很快衰减, 从而形成主要集中在导体表层内侧一个很薄的区域内的趋肤现象, 并且频率越高, 区域越薄, 趋肤效应越强烈。

13. 导体的表面阻抗定义为 $Z_s = R_s + iX_s$, 其中 $R_s = \sqrt{\omega\mu/2\gamma}$ 称为导体的表面电阻, 实际上它就是良导体波阻抗的实部, 而 $X_s = \sqrt{\omega\mu/2\gamma}$ 称为表面电抗, 它是波阻抗的虚部。

14. 等离子体的特性非常像导电介质, 它们能够反射最大频率为临界频率 f_c 的高频电磁波(法向入射时), 临界频率 f_c 为

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$$

习 题 8

8.1 估算频率为 10 GHz 的微波在导电介质银中的趋肤深度, 设银的电导率为 $\gamma = 6.17 \times 10^7 \text{ S/m}$, 并假定银是单价元素。

8.2 海水的电导率 γ 约为 4.6 S/m, 计算刚好能穿透 2 m 深海水的电磁波的频率为多少? 在此频率下, 当能量减少到初始值的 0.0001% 时, 电磁波还能传播多远?

8.3 在下述两种情况下计算对于法向入射波反射时的临界频率: (1) 假设电离层的电子数量密度 N 约为 $10^{12} \text{ (1/m}^3\text{)}$; (2) 一种金属, 如铜(参数如 8.2 节中所给出)。

8.4 证明: 当电磁波在良导体中传播时, 电场每经过一个波长就会衰减 55 dB。

8.5 试证明: (1) 在导体媒质中, 电磁波的电场 \mathbf{E} 的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

式中, ϵ 、 μ 和 γ 分别为媒质的介电常数、磁导率和电导率。

(2) 对一定频率的单色波 $\mathbf{E}e^{i\omega t}$, 导电媒质中的亥姆霍兹方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E}(r) + k_c^2 \mathbf{E}(r) = 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{E} = 0)$$

式中, $k_c^2 = \omega^2 \mu \left(\epsilon - i \frac{\gamma}{\omega} \right)$ 。

8.6 写出良导体中均匀平面波的群速和相速公式。

8.7 设一均匀平面电磁波在一良导体内传播, 其传播速度为光速的 0.1%, 且波长为 0.3 mm, 若媒质的磁导率为 μ_0 , 试确定该电磁波的频率和良导体的电导率。

8.8 计算并比较下列材料的波阻抗、衰减常数和趋肤深度: 铜 ($\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$), 银 ($\gamma = 6.15 \times 10^7 \text{ S/m}$)。已知频率为: (1) 50 Hz; (2) 1 GHz。

8.9 一段长 300 m、半径 $a = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的圆柱形导体, 其电导率 $\gamma = 5.1 \times 10^6 \text{ S/m}$, 磁导率 $\mu = 100\mu_0$, 流过交变电流 $i(t) = 1.5 \cos(3 \times 10^4 t)$ 。试求: (1) 趋肤深度 δ ; (2) 交流电阻 R_s ; (3) 直流电阻 R_d ; (4) 该段

导体的功率损耗 P 。

8.10 比较理想介质与导电媒质中传播的均匀平面电磁波的异同点，并解释产生差异的原因。

第 9 章 电磁波的反射与折射

在前面的章节里，我们讨论了各种媒质(自由空间、绝缘媒质和导电媒质)中的麦克斯韦方程组，但并未考虑下列问题，即电磁波是怎样被激发的(这个内容将在第 11 章中介绍)，以及当电磁波从一种媒质进入到另一种媒质的过程中会发生什么现象。下面将研究后者，即当平面电磁波穿过两种理想的非导体媒质分界面时的情况，将对电场和磁场中两种均匀、各向同性、绝缘媒质的分界面建立一组边界条件，此外，将进一步丰富电磁波的数学描述，以便转换一个视角来对电磁波的传播进行研究。

9.1 电磁波传播的边界条件

图9.1描绘了边界和电磁波的传播方向。为了简单起见，只考虑介质 1 和介质 2 之间的边界为平面的情况。假定边界被置于 yOz 平面(反射面)上，于是 x 轴便垂直于介质分界面。入射电磁波历经边界时必须沿 x 方向行进，才能从介质 1 穿过边界到达介质 2，如果不这样运动就可能使电磁波无法历经边界。边界可以看成是从介质 1 到介质 2 连续变化的一个小区域，在实际情况中，这种混合区域的想法还是可行的，例如像玻璃和空气这样的分界面，在玻璃的表面有一个空气吸附层，该区域内两种物质都存在。麦克斯韦方程组适用于折射率分别为 n_1 和 n_2 的不同介质，自然也适用于边界区域。

在第 3 章中，曾给出了均匀、各向同性绝缘介质中的麦克斯韦方程组，其形式为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0) &= \rho_f / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J}_f / \varepsilon_0 + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0)\end{aligned}$$

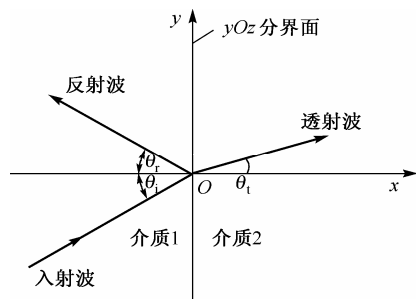


图 9.1 电磁波的入射、反射与透射

式中， ρ_f 和 \mathbf{J}_f 分别是自由电荷密度和自由电流密度。如果只存在由于介质极化产生的电荷和电流，则麦克斯韦方程组又可写成

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0) = 0 \quad (9.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0) \quad (9.4)$$

下面将这些方程展开，具体来看一下它们在边界面上将会变化为何种形式。

首先将式(9.1)展开为

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0 \quad (9.5)$$

前面已经假定仅在 x 方向才会有边界的变化, 沿着 y 方向和 z 方向没有边界, 于是式(9.5)中对 y 和 z 的导数项应为零, 则

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial x} = 0 \quad (9.6)$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x + \frac{1}{\varepsilon_0} P_x \right) = 0 \quad (9.7)$$

式(9.7)表明, 在穿过边界时, $(E_x + P_x/\varepsilon_0)$ 这一项的大小并不改变, 即 $(E_x + P_x/\varepsilon_0)$ 在边界两边的介质 1 和介质 2 中均具有相同的值, 即

$$(E_x + P_x/\varepsilon_0)_1 = (E_x + P_x/\varepsilon_0)_2 \quad (9.8)$$

之所以这样说, 是因为在前面对边界进行讨论时, 就已经将它视为一个从介质 1 到介质 2 的连续变化的区域, 故边界两边的任何参数必定是 x 的连续变化函数。而如果一个函数对 x 的导数是连续的并且等于零, 那么该函数将不随 x 变化。

对于各向同性的绝缘介质, 可以利用 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 之间的关系, 简化电场在 x 方向分量的边界条件。在第 3 章中定义过相对介电系数 ε_r , 即为

$$\varepsilon_r = \frac{E + P/\varepsilon_0}{E}$$

同时还指出了它与折射率 n 的关系为

$$\varepsilon_r = n^2$$

因而有

$$n^2 = \frac{E + P/\varepsilon_0}{E}$$

于是可得

$$P = \varepsilon_0 E(n^2 - 1) \quad (9.9)$$

这样就可以写出电场在 x 方向上分量的边界条件为

$$[E_x + E_x(n_1^2 - 1)]_1 = [E_x + E_x(n_2^2 - 1)]_2$$

$$\text{即} \quad n_1^2 (E_x)_1 = n_2^2 (E_x)_2 \quad (9.10)$$

现在考虑麦克斯韦第二方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

在边界区域内, 我们所感兴趣的是对 x 的导数, 因此可以令上式右边为零, 而左边为

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

其中与 x 无关的所有项的导数均应为零, 于是得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_x 0 - \mathbf{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (9.11)$$

由于在边界区域内有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$$

因而得到

$$0 = \mathbf{e}_x 0 - \mathbf{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (9.12)$$

式(9.12)应有

$$\partial E_z / \partial x = 0 \quad (9.13)$$

$$\partial E_y / \partial x = 0 \quad (9.14)$$

根据前面的讨论可知, 式(9.13)和式(9.14)说明了电场的 z 分量和 y 分量在穿过介质分界面时也都不会改变, 因而全部的电场边界条件为

$$\begin{cases} n_1^2 (E_x)_1 = n_2^2 (E_x)_2 \\ (E_y)_1 = (E_y)_2 \\ (E_z)_1 = (E_z)_2 \end{cases} \quad (9.15)$$

磁场的边界条件则可以从式(9.3)和式(9.4)两个麦克斯韦方程中得出。由式(9.3), 设与 x 无关的所有变量均为零, 则有

$$\partial B_x / \partial x = 0$$

如果上述导数在穿过边界时是连续的, 则该式表明磁场在穿过边界时其 x 方向的分量不会发生变化, 即

$$(B_x)_1 = (B_x)_2$$

由式(9.4)已知

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + \mathbf{P} / \varepsilon_0)$$

因此, 在我们所假定的情况下建立磁场的边界条件时, 只需考虑随 x 发生变化的量, 而可分别令那些随 y 、 z 、 t 变化的变量为零, 即令

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0$$

由于

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

展开并代入上式, 可得

$$\mathbf{e}_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0$$

即

$$\mathbf{e}_x 0 - \mathbf{e}_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

所以有

$$\partial B_y / \partial x = 0, \quad \partial B_z / \partial x = 0$$

此外, 如果上述导数在穿过边界时是连续的, 则有

$$(B_y)_1 = (B_y)_2, \quad (B_z)_1 = (B_z)_2$$

因此, 磁场的边界条件可以用矢量方程表示为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \quad (9.16)$$

这说明在上述各种假设下,磁场的任何分量在穿过边界时都不改变。

9.2 传播矢量

在第7章中曾指出,方程

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)] \quad (9.17)$$

描述了一个沿 z 方向传播的单色平面波,其中 \mathbf{E}_0 是一个常向量,其大小确定了电场的幅值,而其方向则给定了电场的极化方向,式中的常数 k 为

$$k = \omega n/c \quad (9.18)$$

这里, c 是电磁波在自由空间中的传播速度; n 是介质对波的折射率; ω 则为波的角频率。下面我们采用一种比较灵活的方法来确定波的传播方向,首先考虑一个位置矢量 \mathbf{r} (描述场点的矢量, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$) 与矢量 \mathbf{k} (设 $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$) 的标量积:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (9.19)$$

式(9.19)右边的最后一项类似于式(9.17)所描述的单向平面单色波中代表空间位置的指数项 kz 。如果现在将 \mathbf{k} 定义为传播矢量,并把平面单色波的方程写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (9.20)$$

则只需要改变 \mathbf{k} 的分量,就可以达到表示波的传播方向的目的。例如,对于仅在 z 方向传播的波,则令 $k_x = 0$ 和 $k_y = 0$ 就可以。

另外,利用传播矢量 \mathbf{k} 来描述波还有一个好处,这就是可以很容易得到场量关于时间和空间的导数。将式(9.20)写成标量积的形式,得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)] \quad (9.21)$$

显然有 $\partial \mathbf{E} / \partial t = i\omega \mathbf{E}$

因而微分算子 $\partial / \partial t$ 等效于用 $i\omega$ 相乘,即

$$\partial / \partial t \equiv i\omega \quad (9.22)$$

对于空间坐标的导数,则为

$$\partial \mathbf{E} / \partial x = -ik_x \mathbf{E}, \quad \partial \mathbf{E} / \partial y = -ik_y \mathbf{E}, \quad \partial \mathbf{E} / \partial z = -ik_z \mathbf{E}$$

由于

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

所以算子 ∇ 等效于 $-i\mathbf{k}$, 即

$$\nabla \equiv -i\mathbf{k} \quad (9.23)$$

此外,由矢量分析可知

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2$$

式(9.18)给出了 $k = \omega n/c$ 。我们知道,只沿 z 方向传播的情况属于 \mathbf{k} 的一种特殊情况,这时可将上式写为

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 n^2 / c^2 \quad (9.24)$$

9.3 平面边界的反射与透射

现在我们准备利用传播矢量来对平面单色波在两种理想绝缘介质(假定为均匀、各向同性和无损耗)之间的平面边界(如图9.2所示)上的反射和透射问题重新进行讨论。

电波的方程可写为

$$\text{入射波 } \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

$$\text{反射波 } \mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 \exp[i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})]$$

$$\text{透射波 } \mathbf{E}_t = \mathbf{E}''_0 \exp[i(\omega'' t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})]$$

显然,必须首先明确地给出入射平面单色波的描述式。这里 \mathbf{k} 代表传播方向,常矢量 \mathbf{E}_0 则表示入射电场的方向。此外,波的传播方向可以是任意的,而 \mathbf{k} 也不一定要取在 xOy 平面上,即

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$$

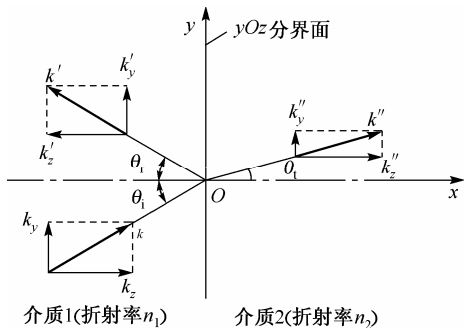


图9.2 平面单色波在两种理想绝缘介质交界面上的入射、反射和透射

在第7章中曾经指出:当平面线性极化波穿过各向同性绝缘介质时,场的方向不会产生旋转变化。这样,在假定介质1、介质2和边界区域均为各向同性的情况下,就可以认为电场方向是不会发生旋转变化的。如果用 \mathbf{E}_0 代表入射波的方向,那么反射波 \mathbf{E}'_0 和透射波 \mathbf{E}''_0 将与 \mathbf{E}_0 同方向。我们已将 yOz 面称为反射面,但还要另外定义一个平面,即将介质分界面的法向矢量与入射波 \mathbf{E}_0 的方向构成的平面称为入射面。一般情况下,入射波能够与入射面构成任意角度。然而,按照我们对于所要解决问题的考虑, \mathbf{E}_0 的方向可能会出现两种极端情况,即它或与 xOy 平面平行或垂直于 xOy 平面,而 \mathbf{E}_0 的其他全部可能的取向(当然, \mathbf{E}_0 仍然垂直于传播方向 \mathbf{k})可以用这两个相互垂直的方向的矢量和来表示。下面就来分别考虑这两种极端的情况。

第一种情况: \mathbf{E} 的极化平面垂直于 xOy 平面(入射面)

在这种情况下,电场只有 z 分量。边界上介质1一边的电场 \mathbf{E}_1 是入射场 \mathbf{E}_i 和反射场 \mathbf{E}_r 的矢量和,而介质2这一边的情况则比较简单,电场 \mathbf{E}_2 就是透射场 \mathbf{E}_t , 即有

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$$

这些场都只存在 z 分量,而且电场在 z 分量上的边界条件为

$$(E_z)_1 = (E_z)_2$$

因而有

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t$$

即

$$\mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \mathbf{E}'_0 \exp[i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{E}''_0 \exp[i(\omega'' t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})] \quad (9.25)$$

现在假定入射波的传播方向在 xOy 平面上,于是有

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + 0z$$

对于反射波传播方向,有

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = k'_x x + k'_y y + k'_z z$$

而对于透射波传播方向, 则有

$$\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} = k''_x x + k''_y y + k''_z z$$

式(9.25)在边界上即 $x = 0$ 处成立, 因而可以写为

$$E_0 \exp[i(\omega t - k_y y - 0z)] + E'_0 \exp[i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)] = E''_0 \exp[i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)]$$

如果要求该方程必须在边界上的每一点, 即对于任何 y 和 z 值都成立, 而且在任何时刻也必须成立, 则应有

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad k_y = k'_y = k''_y, \quad 0 = k'_z = k''_z$$

将式(9.24)中所给出的一般性结论应用于入射波, 可得

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 n_1^2 / c^2$$

对于反射波, 有

$$(k')^2 = (k'_x)^2 + (k'_y)^2 = (\omega')^2 n_1^2 / c^2$$

因为 $\omega = \omega'$, $k_y = k'_y$, 于是有

$$(k'_x)^2 + (k'_y)^2 = (\omega)^2 n_1^2 / c^2$$

所以

$$k_x^2 = (k'_x)^2 \quad \text{或} \quad k_x = \pm k'_x$$

其中的正根表明入射波和反射波的传播矢量具有相同的分量, 即入射波和反射波的传播方向相同。为了反映入射与反射的真实情况, 则应该取

$$k_x = -k'_x$$

又有 $k_y = k'_y$, 这样便有(参见图9.3)

$$\theta_i = \theta_r \quad (9.26)$$

式(9.26)表示入射角等于反射角, 这就是斯涅耳反射定律。

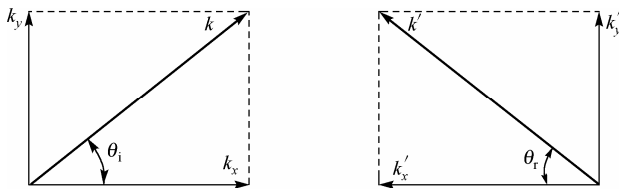


图 9.3 斯涅耳反射定律的图示

而对于透射波, 则有

$$(k'')^2 = (k''_x)^2 + (k''_y)^2 = (\omega'')^2 n_2^2 / c^2 = (n_2 / n_1)^2 (k_x^2 + k_y^2)$$

式中最后一个等式是与入射波相比较的结果。对于入射角和透射角, 又有

$$\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = \sin \theta_i, \quad \frac{k''_y}{\sqrt{(k''_x)^2 + (k''_y)^2}} = \sin \theta_t$$

式中, $k_y = k''_y$ 。

于是可得

$$\frac{(k_y'')^2}{[(k_x'')^2 + (k_y'')^2]} = \frac{k_y^2}{[(n_2/n_1)^2(k_x^2 + k_y^2)]}$$

即有

$$(\sin \theta_t)^2 = (n_1/n_2)^2 (\sin \theta_i)^2$$

或

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \quad (9.27)$$

式(9.27)称为斯涅耳折射定律。

上面所得到的结果表明,在透射和反射过程中波的频率是不变的,入射、反射、透射三种电波的传播方向均垂直于 xOy 平面(入射平面),入射角等于反射角。

为了获得三种波的振幅之间的关系,我们来看一下磁场的边界条件

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_t$$

这时磁场 \mathbf{B}_i 在反射面一边,它由入射磁场 \mathbf{B}_i 和反射磁场 \mathbf{B}_r 二者合成,而在边界另一边则仅有磁场 \mathbf{B}_t , 所以边界条件可以写成

$$\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_t$$

在 9.2 节中知道 $\nabla \equiv -i\mathbf{k}$ 和 $\partial/\partial t \equiv i\omega$, 于是麦克斯韦第二方程可以写成

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}$$

这样就可以用电场将上述磁场的边界条件表示为

$$\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega} + \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'} = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''}$$

由于 $\omega = \omega' = \omega''$, 并且每一个电场仅有 z 方向的分量, 于是上式又变为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ k_x & k_y & 0 \\ 0 & 0 & E_{iz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ k'_x & k'_y & 0 \\ 0 & 0 & E_{rz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ k''_x & k''_y & 0 \\ 0 & 0 & E_{tz} \end{vmatrix} \quad (9.28)$$

矢量方程对应的各分量应分别相等, 所以对于 \mathbf{e}_x 分量有

$$k_y E_{iz} + k'_y E_{rz} = k''_y E_{tz}$$

而 $k_y = k'_y = k''_y$, 因此可得

$$E_0 \exp[i(\omega t - k_y y)] + E'_0 \exp[i(\omega' t - k'_y y)] = E''_0 \exp[i(\omega'' t - k''_y y)]$$

式中利用了 $k'_z = k''_z = 0$, 并且边界上有 $x=0$ 。由于上式中每一项的指数因子部分都应相同, 所以有

$$E_0 + E'_0 = E''_0 \quad (9.29)$$

尽管式(9.29)反映了三个电场振幅之间的关系, 但是由于这三个电场都是沿 z 方向的, 所以又有

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}''_0 \quad (9.30)$$

对于式(9.28)的 \mathbf{e}_y 方向分量, 则可以得到

$$-k_x E_{iz} - k'_x E_{rz} = -k''_x E_{tz}$$

即有

$$k_x E_0 \exp[i(\omega t - k_y y)] + k'_x E'_0 \exp[i(\omega' t - k'_y y)] = k''_x E''_0 \exp[i(\omega'' t - k''_y y)]$$

式中,再一次用到了 $0 = k'_z = k''_z$ 及 $x = 0$ 的条件。上式中每一项的指数因子部分又都相同,故有

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0$$

又因为 E_0 、 E'_0 和 E''_0 均在同一个方向,所以可以将这个标量方程写成矢量关系式:

$$k_x \mathbf{E}_0 + k'_x \mathbf{E}'_0 = k''_x \mathbf{E}''_0 \quad (9.31)$$

现在有了两个与三个电场相关联的方程,即式(9.30)和式(9.31),将式(9.30)乘上 k''_x 后再减式(9.31),得

$$(k''_x - k_x) \mathbf{E}_0 + (k''_x - k'_x) \mathbf{E}'_0 = 0$$

即有

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k''_x - k'_x} \mathbf{E}_0$$

由于 $k'_x = -k_x$, 所以有

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k''_x + k_x} \mathbf{E}_0 \quad (9.32)$$

式(9.32)是在电场的切向分量连续这一前提下得出的,根据第3章中关于边界条件的讨论可知,在介质1和介质2的交界面上 $E_{1t} = E_{2t}$, 当介质的交界面上无面电流分布时,磁场 \mathbf{H} 的切向分量也应是连续的,即 $H_{1t} = H_{2t}$, 于是有

$$H_0 + H'_0 = H''_0 \quad (9.33)$$

根据阻抗关系,引入本征阻抗 η 后有

$$H_0 + H'_0 = \frac{1}{\eta_1} (E_0 \cos \theta_i - E'_0 \cos \theta_i)$$

$$H''_0 = \frac{1}{\eta_2} \cos \theta_t E''_0$$

所以式(9.33)可写成

$$\frac{1}{\eta_1} (E_0 \cos \theta_i - E'_0 \cos \theta_i) = \frac{1}{\eta_2} \cos \theta_t E''_0 \quad (9.34)$$

式中, $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$; $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$ 。于是,联立式(9.29)和式(9.34)后,可得入射、反射和折射这三个电场振幅之间的另一种描述关系为

$$E'_0 = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_0 = R_{\perp} E_0 \quad (9.35)$$

$$E''_0 = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_0 = T_{\perp} E_0 \quad (9.36)$$

定义

$$R_{\perp} = \frac{E'_0}{E_0} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (9.37)$$

$$T_{\perp} = \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (9.38)$$

式中, R_{\perp} 称为垂直极化波电场反射系数, T_{\perp} 称为垂直极化波电场折射系数。式(9.37)和式(9.38)

又称为垂直极化波的非涅耳公式。

入射、反射和折射这三个电场振幅之间还有一种描述关系。由于 $k_y = k_y''$ ，所以式(9.32)可以变为

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{k_x/k_y - k_x''/k_y''}{k_x''/k_y'' + k_x/k_y} \mathbf{E}_0 = \frac{\cot \theta_i - \cot \theta_t}{\cot \theta_i + \cot \theta_t} \mathbf{E}_0 = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \cos \theta_t \sin \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \cos \theta_t \sin \theta_i} \mathbf{E}_0$$

$$\text{则} \quad \mathbf{E}'_0 = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \mathbf{E}_0 \quad (9.39)$$

将式(9.30)乘上 k'_x 后再减去式(9.31)，可得

$$(k'_x - k_x) \mathbf{E}_0 = (k'_x - k_x'') \mathbf{E}''_0$$

由于 $k_x = -k'_x$ ，则

$$\mathbf{E}''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k_x''} \mathbf{E}_0$$

用 $k_y = k_y''$ 除以上式，有

$$\mathbf{E}''_0 = \frac{2k_x/k_y}{k_x/k_y + k_x''/k_y''} \mathbf{E}_0 = \frac{2 \cot \theta_i}{\cot \theta_i + \cot \theta_t} \mathbf{E}_0$$

$$\text{于是得到} \quad \mathbf{E}''_0 = \frac{2}{1 + \tan \theta_i \cot \theta_t} \mathbf{E}_0 \quad (9.40)$$

第二种情况： E 的极化平面平行于 xOy 平面(入射面)

在这种情况下，入射波在 xOy 平面传播，仅有 x 分量和 y 分量，所以其传播矢量 \mathbf{k} 中不存在 z 分量，可以表示为

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - 0z)]$$

入射波的方向是由常矢量 \mathbf{E}_0 来确定的，即有

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_{0x} + \mathbf{e}_y E_{0y} + \mathbf{e}_z 0$$

我们可以像前一种情况那样通过电场来进行研究，但这里最好从磁场的角度进行讨论，因为这时电场位于入射面内，而磁场只有 z 分量，所以推导过程与前面电场只有 z 分量时的推导过程是相同的。入射波中的磁场可以表示为

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{B}_0 \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - 0z)]$$

式中，磁场的方向 \mathbf{B}_0 为

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_x 0 + \mathbf{e}_y 0 + \mathbf{e}_z B_0$$

磁场随着时间和空间位置的变化沿着 $\pm \mathbf{k}$ 交替发生变化。类似地，反射波可以表示为

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B}'_0 \exp[i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{B}'_0 \exp[i(\omega' t - k'_x x - k'_y y - k'_z z)]$$

式中，

$$\mathbf{B}'_0 = \mathbf{e}_x 0 + \mathbf{e}_y 0 + \mathbf{e}_z B'_0$$

对于透射波，则有

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}''_0 \exp[i(\omega'' t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{B}''_0 \exp[i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y - k''_z z)]$$

式中,

$$\mathbf{B}_0'' = \mathbf{e}_x 0 + \mathbf{e}_y 0 + \mathbf{e}_z B_0''$$

现在就可以来应用磁场的边界条件, 即

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$$

我们知道边界上介质 1 中的场是由入射波和反射波叠加而成的, 而介质 2 中仅有透射波的场。由于整个区域中的介质都是各向同性的, 所以波在传播过程中其方向不会发生变化, 即 \mathbf{B}_i 、 \mathbf{B}_r 和 \mathbf{B}_t 三者方向相同, 都是沿着 \mathbf{e}_z 方向, 那么边界条件就可以写成

$$\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_t$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & B_0 \mathbf{e}_z \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - 0z)] + B_0' \mathbf{e}_z \exp[i(\omega' t - k_x' x - k_y' y - k_z' z)] \\ & = B_0'' \mathbf{e}_z \exp[i(\omega'' t - k_x'' x - k_y'' y - k_z'' z)] \end{aligned}$$

该方程仅在 $x=0$ 的边界上成立, 这就是说对于边界上所有 y 和 z 的点, 它在任意时刻都必须成立, 因而有

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad k_y = k_y' = k_y'', \quad 0 = k_z' = k_z''$$

最后一个式子表明三个波都是在与 xOy 平面平行的同一个平面, 即在入射平面上进行传播的。对于入射波和反射波, 其传播矢量的幅值的平方分别为

$$\begin{aligned} k^2 &= k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 n_1^2 / c^2 \\ (k')^2 &= (k_x')^2 + (k_y')^2 = (\omega')^2 n_1^2 / c^2 \end{aligned}$$

由于 $k_y = k_y'$ 及 $\omega = \omega'$, 所以有

$$k_x^2 = (k_x')^2$$

$$\text{即} \quad k_x = \pm k_x'$$

显然这里若取正根, 则反射波和入射波的传播方向就是相同的, 所以应该取负根, 即有

$$k_x = -k_x'$$

因而有

$$\theta_i = \theta_r$$

此式就是斯涅耳反射定律。

对于入射波和透射波, 很容易求出其传播矢量幅值的平方, 它们分别为

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 n_1^2 / c^2$$

$$\text{和} \quad (k'')^2 = (k_x'')^2 + (k_y'')^2 = (\omega'')^2 n_2^2 / c^2$$

由上面的式子可以得出

$$\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = \sin \theta_i = \frac{k_y}{(\omega n_1 / c)}$$

和

$$\frac{k_y''}{\sqrt{(k_x'')^2 + (k_y'')^2}} = \sin \theta_t = \frac{k_y''}{(\omega'' n_2 / c)}$$

由于 $k_y = k_y''$ 和 $\omega = \omega''$, 所以有

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

这表明,在这种情况下斯涅耳折射定律也成立。

现在来寻求各种波的幅值之间的关系,这需要用到电场的边界条件。根据下面的麦克斯韦方程,可以从磁场得出电场:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right)$$

这里,可令自由电流密度 \mathbf{J} 为 0, 则对于均匀、各向同性的无损耗绝缘介质, 上式可写成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right)$$

相对介电常数 ϵ_r 已定义为

$$\epsilon_r = (E + P/\epsilon_0)/E$$

它与折射率 n 的关系为

$$n^2 = \epsilon_r$$

因此有

$$n^2 = (E + P/\epsilon_0)/E$$

于是麦克斯韦第四方程变为

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = n^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

已经知道 $\partial/\partial t \equiv i\omega$, $\nabla \equiv -ik$, 于是可得

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{c^2}{\omega n^2} \right) [\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = \frac{c^2}{\omega n^2} \mathbf{B} \times \mathbf{k} \quad (9.41)$$

因此有

$$\mathbf{E}_i = \left(\frac{c^2}{\omega n_1^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & B_i \\ k_x & k_y & 0 \end{vmatrix} = - \left(\frac{c^2}{\omega n_1^2} \right) [e_x k_y B_i - e_y k_x B_i + e_z 0]$$

类似地, 可得

$$\mathbf{E}_r = - \left(\frac{c^2}{\omega' n_1^2} \right) [e_x k'_y B_r - e_y k'_x B_r + e_z 0]$$

和

$$\mathbf{E}_t = - \left(\frac{c^2}{\omega'' n_2^2} \right) [e_x k''_y B_t - e_y k''_x B_t + e_z 0]$$

电场的边界条件是

$$(E_y)_1 = (E_y)_2 \quad \text{和} \quad n_1^2 (E_x)_1 = n_2^2 (E_x)_2$$

应用 x 边界的边界条件并注意到 $\omega = \omega' = \omega''$, 可得

$$(1/n_1)^2 n_1^2 [k_y B_i + k'_y B_r] = n_2^2 [k''_y B_t] (1/n_2)^2$$

又因为 $k_y = k'_y = k''_y$, 于是有

$$B_i + B_r = B_t \quad \text{或} \quad B_0 + B'_0 = B''_0$$

由于三个磁场的方向都相同, 所以可将上式写成矢量方程, 即

$$\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'_0 = \mathbf{B}''_0 \quad (9.42)$$

类似地, 应用 y 边界的边界条件可得

$$(1/n_1)^2 [k_x B_i + k'_x B_r] = (1/n_2)^2 [k''_x B_t]$$

因为 $k_x = -k'_x$, 则上式又变为

$$B_i - B_r = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{k''_x}{k_x}\right)^2 B_t$$

或

$$B_0 - B'_0 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{k''_x}{k_x}\right) B''_0$$

又由于三个磁场的方向相同, 所以可将上式也写成矢量方程, 即有

$$\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}'_0 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{k''_x}{k_x}\right) \mathbf{B}''_0 \quad (9.43)$$

用 $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{k''_x}{k_x}\right)$ 乘以式(9.42)再减去式(9.43), 可得

$$\mathbf{B}_0 \left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x}{k_x} - 1 \right] + \mathbf{B}'_0 \left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x}{k_x} + 1 \right] = 0$$

即有

$$\mathbf{B}'_0 = -\mathbf{B}_0 \left[\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x}{k_x} - 1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x}{k_x} + 1} \right]$$

其中,

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x}{k_x} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x k_y}{k_y k_x} \quad (\text{因为 } k_y = k''_y)$$

$$= \left(\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i}\right)^2 \frac{\cos \theta_t}{\sin \theta_t} \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i}$$

所以得

$$\mathbf{B}'_0 = -\mathbf{B}_0 \left(\frac{\sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_i} \right)$$

或写为

$$\mathbf{B}'_0 = -\mathbf{B}_0 \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \quad (9.44)$$

将式(9.43)和式(9.44)相加, 可得

$$2\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}''_0 \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k''_x}{k_x} \right]$$

于是便得出透射场与入射场之间的关系为

$$\mathbf{B}_0'' = \frac{2}{\left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{k_x''}{k_x}\right]} \mathbf{B}_0$$

或

$$\mathbf{B}_0'' = \frac{2}{\left[1 + \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}\right]} \mathbf{B}_0 \quad (9.45)$$

实际上,磁场的这一结果也可以直接用于表示对应的电场幅值之间的关系。式(9.41)所给出的电场和磁场之间的关系为

$$\mathbf{E} = \frac{c^2}{\omega n^2} \mathbf{B} \times \mathbf{k}$$

式中 $k = \omega n/c$, 因而有

$$E = \frac{c^2}{\omega n^2} B \left(\frac{\omega n}{c} \right), \quad E = \frac{c}{n} B$$

于是从式(9.44)便可以得出入射波与反射波的电场幅值之间的关系为

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \quad (9.46)$$

式中,幅值之比只可能取正值。而由式(9.45)又可得到入射波与透射波的电场幅值之间的关系为

$$n_2 E_0'' = \frac{2}{\left[1 + \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}\right]} n_1 E_0, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n_1}{n_2} \left[\frac{2}{1 + \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}} \right] \quad (9.47)$$

上述关系也可仿照第一种情况中那样用反射系数和折射系数来表示。

由于此时有

$$(E_0 \cos \theta_i - E_0' \cos \theta_i) = \cos \theta_t E_0''$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{\eta_1} (E_0 + E_0') = \frac{1}{\eta_2} E_0'' \quad (9.48)$$

$$\text{所以有} \quad E_0' = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} E_0 = R_{//} E_0 \quad (9.49)$$

$$E_0'' = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} E_0 = T_{//} E_0 \quad (9.50)$$

$$\text{定义} \quad R_{//} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \quad (9.51)$$

$$T_{//} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \quad (9.52)$$

式中, $R_{//}$ 称为平行极化波的电场反射系数, $T_{//}$ 称为平行极化波的电场折射系数。式(9.51)和式(9.52)又称为平行极化波的非涅耳公式。

9.4 反射波的极化

反射波电场的幅值可以由下面两式求得,即

$$\text{当 } \mathbf{E} \text{ 垂直于入射平面时} \quad \frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \quad (9.53)$$

$$\text{当 } \mathbf{E} \text{ 平行于入射平面时} \quad \frac{E'_0}{E_0} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \quad (9.54)$$

我们知道 $\tan(\pi/2) = \infty$, 如果 $\theta_t + \theta_i = \pi/2$, 那么由式(9.54)可知将不存在平行于 xOy 平面的反射分量, 然而由于 $\sin(\pi/2) = 1$, 所以就会有一个垂直于 xOy 平面的反射分量。式(9.53)表明, 这时比值 E'_0/E_0 为一有限值。另一方面, 假设 $\theta_t = \theta_i \neq 0$, 但此时式(9.53)和式(9.54)的分子均为零, 那么这两式就为零。然而 $\theta_t = \theta_i$ 的情况与反射的物理现象是不相符的, 因为由斯涅耳定律可知, 如果 $\theta_t = \theta_i \neq 0$, 则有 $n_1 = n_2$, 也就没有边界可言。这样, 从式(9.53)和式(9.54)可以得出结论: 如果 $\theta_t + \theta_i = \pi/2$, 由于这时只有垂直于入射平面的电场分量会被反射, 所以它就是被边界所反射的极化波。

一般来讲, 任何角度入射的波都存在部分极化的情况, 但满足下式的波被反射后会产生完全极化现象:

$$\theta_t + \theta_i = \pi/2 \quad (9.55)$$

将式(9.55)代入式(9.27)所示的斯涅耳折射定律, 可以定义出一个特殊的入射角 θ_B , 称为布儒斯特角, 此时两种介质边界上所反射的波将会被完全极化, 并且有

$$\tan \theta_B = n_2/n_1 \quad (9.56)$$

9.5 法向入射

在法向入射的情况下, 反射波幅值 E'_0 与入射波幅值 E_0 两者比值的表示形式特别简单。根据斯涅耳定律可知, 对于法向入射, 有

$$\theta_t = \theta_i = 0 \quad \text{且} \quad \cos \theta_t = \cos \theta_i = 1$$

因为比值 $0/0$ 为不确定量, 所以必须对式(9.53)和式(9.54)的形式加以改变。当电场 \mathbf{E} 的方向平行于入射平面时, 可得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} = \frac{\cos \theta_t \sin \theta_t - \cos \theta_i \sin \theta_i}{\cos \theta_t \sin \theta_t + \cos \theta_i \sin \theta_i} = \frac{\cos \theta_t - \cos \theta_i (\sin \theta_t / \sin \theta_i)}{\cos \theta_t + \cos \theta_i (\sin \theta_t / \sin \theta_i)}$$

如果 $\theta_t = \theta_i = 0$, 利用斯涅耳定律有

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (9.57)$$

类似地, 对于垂直于入射平面的 \mathbf{E} , 有

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \cos \theta_t \sin \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \cos \theta_t \sin \theta_i}$$

再根据斯涅耳定律, 如果 $\theta_t = \theta_i = 0$, 则可得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

因此在法向入射的情况下, 对于与入射面垂直和平行的 \mathbf{E} 来说, 其反射波幅值 E'_0 与入射波幅值 E_0 两者比值的结果是相同的。波的能量或是强度与 \mathbf{E} 或 \mathbf{B} 的模的平方成正比, 并且反射强度 I_r 与入射强度 I_i 之比为

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E'_0}{E_0} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (9.58)$$

此式表明, 在法向入射的情况下, 边界上的反射是折射率之差的平方的函数。

在法向入射的情况下, 式(9.37)和式(9.38)及式(9.51)和式(9.52)所描述的反射系数和折射系数变成了

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad T_{\perp} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (9.59)$$

$$R_{//} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}, \quad T_{//} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (9.60)$$

它们分别满足 $1 + R_{\perp} = T_{\perp}$ 和 $1 + R_{//} = (\eta_1/\eta_2)T_{//}$ 的关系。

这时若媒质1是理想介质, 媒质2是理想导体 ($\eta_2 = 0$), 则 $R_{\perp} = -1$, $T_{\perp} = 0$, 即入射波在边界上完全反射。

为了方便讨论, 一般可将垂直入射问题都视为垂直极化, 并将反射系数 R_{\perp} 简记为 R , 那么这时在介质1的区域内, 总的电场和总的磁场将是入射场和反射场的叠加, 即

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_0 (e^{-ik_1 z} + R e^{ik_1 z}) \quad (9.61)$$

$$\mathbf{H}_1 = -\mathbf{e}_x \frac{E_0}{\eta_1} (e^{-ik_1 z} - R e^{ik_1 z}) \quad (9.62)$$

对式(9.61)稍做变换, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_0 (e^{-ik_1 z} + R e^{-ik_1 z} - R e^{-ik_1 z} + R e^{-ik_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_x E_0 [(1 + R) e^{-ik_1 z} + i2R \sin k_1 z] \end{aligned} \quad (9.63)$$

忽略 E_0 中的初始相位常量, 令其等于实数 E_m , 则介质1区域内的总电场的瞬时值为

$$\mathbf{E}_1(t) = \text{Re}[\mathbf{E}_1 e^{i\omega t}] = \mathbf{e}_x E_m (1 + R) \cos(\omega t - k_1 z) - \mathbf{e}_x E_m 2R \sin k_1 z \sin \omega t \quad (9.64)$$

式中, 第1项表示它是向着 z 方向传播的平面电磁波, 我们称其为行波; 第2项是幅度随着 z 按照正弦变化的电磁振荡波, 我们称其为驻波。形成驻波的条件是产生波的全反射, 即由入射行波与反射行波叠加而形成驻波。驻波的平均功率流密度为零, 没有电磁场能量的传输, 只有电场能量与磁场能量的交换。式(9.64)描述的行波与驻波的混合状态称为行驻波。

如果将式(9.61)和式(9.62)改写为

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_m (1 + R e^{i2k_1 z}) e^{-ik_1 z} \quad (9.65)$$

$$\mathbf{H}_1 = -\mathbf{e}_x \frac{E_m}{\eta_1} (1 - R e^{i2k_1 z}) e^{-ik_1 z} \quad (9.66)$$

这样就可以将驻波理解为向着 z 方向传播的一个平面波, 它的振幅为 $e^{-ik_1 z}$ 前面的模值, 即

$$|E_1| = E_m [1 + R^2 + 2R \cos(2k_1 z)]^{1/2} \quad (9.67)$$

$$|H_1| = \frac{E_m}{\eta_1} [1 + R^2 - 2R \cos(2k_1 z)]^{1/2} \quad (9.68)$$

式(9.67)和式(9.68)是以 z 为变量, 以 $\lambda/2$ 为波长的周期性函数, 其性质分以下两种情况讨论。

(1) 若 $\eta_2 > \eta_1$, 电磁波由光密媒质入射到光疏媒质上, 这时 $R > 0$, 在 $2k_1 z = -2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 即 $z = -n\lambda_1/2$ 处, 为电场振幅的最大点和磁场振幅的最小点, 这时

$$|E_1| = E_{\max} = E_m (1 + R) \quad (9.69)$$

$$|H_1| = H_{\min} = \frac{E_m}{\eta_1} (1 - R) \quad (9.70)$$

在 $2k_1 z = -(2n+1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 即 $z = -(2n+1)\lambda_1/4$ 处, 为电场振幅的最小点和磁场振幅的最大点, 这时

$$|E_1| = E_{\min} = E_m (1 - R) \quad (9.71)$$

$$|H_1| = H_{\max} = \frac{E_m}{\eta_1} (1 + R) \quad (9.72)$$

场强振幅的最大点处称为波腹, 场强振幅的最小点处称为波节。可见, 当电磁波由光密媒质入射到光疏媒质上时, 分界面处为电场的波腹、磁场的波节; 而距离分界面 $\lambda_1/4$ 处, 为电场的波节和磁场的波腹。

(2) 反之, 若 $\eta_2 < \eta_1$, 电磁波由光疏媒质入射到光密媒质上, 这时 $R < 0$, 电场的波腹和波节的位置与上述情况正好相反。

电场或磁场的最大振幅与最小振幅之比被定义为**驻波比**或**驻波系数**, 记为 S_w , 即

$$S_w = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \quad (9.73)$$

反之, 也可用驻波系数 S_w 表示反射系数 $|R|$:

$$|R| = \frac{S_w - 1}{S_w + 1} \quad (9.74)$$

在行驻波混合状态下, 可以定义**行波系数**, 记为 K_w , 即

$$K_w = \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \frac{H_{\min}}{H_{\max}} = \frac{1 - |R|}{1 + |R|} = \frac{1}{S_w} \quad (9.75)$$

同样, 也可用行波系数 K_w 表示反射系数 $|R|$:

$$|R| = \frac{1 - K_w}{1 + K_w} \quad (9.76)$$

9.6 全折射与全反射

9.6.1 全折射

当电磁波以某一入射角入射到两种媒质交界面上时，如果反射系数为零，则全部电磁能量都进入到第二种媒质，这种情况称为全折射。出现全折射时对应的入射角就是布儒斯特角 θ_B ，下面以垂直极化波和平行极化波两种情况进行讨论。

1. 垂直极化波的情况

由式(9.37)所示的非涅耳公式可知，使垂直极化波反射系数 $R_{\perp}=0$ 的条件是

$$\eta_2 \cos \theta_i = \eta_1 \cos \theta_t$$

两端平方后并整理，可得

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{1 - \mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}} \quad (9.77)$$

对于一般的非磁性媒质， $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ，如果 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ，则式(9.77)无解，即不存在这样的入射角；如果 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ，则成为同一媒质，没有界面存在， θ_i 为任意角时都不会使电磁波的传播性质有所改变，故垂直极化波只有在两种不同媒质的界面上才有产生全折射的可能。

2. 平行极化波的情况

由式(9.51)所示的非涅耳公式可知，使平行极化波反射系数 $R_{//}=0$ 的条件是

$$\eta_1 \cos \theta_i = \eta_2 \cos \theta_t$$

两端平方后并整理，可得

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2}{1 - (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)^2}} \quad (9.78)$$

对于一般的非磁性媒质，由于 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ，所以有

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2}} \quad (9.79)$$

因此，布儒斯特角为

$$\theta_B = \theta_i = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

发生全折射时，折射角与入射角的关系为

$$\sin \theta_t = \sqrt{\varepsilon_1 / \varepsilon_2} \sin \theta_B = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_B} = \cos \theta_B \quad (9.80)$$

因此有

$$\theta_i + \theta_B = \pi/2$$

一个极化在任意方向的均匀平面波，当它以布儒斯特角入射到两种媒质的分界面上时，其平行分量发生全折射，结果使得反射波成为一个垂直极化波。光学从圆极化光中获得“偏振光”的起偏器就正是利用了这一原理。

9.6.2 全反射

当电磁波入射到两种媒质交界面上时,如果反射系数 $|R|=1$,则投射到界面上的电磁波将全部反射回第一种媒质中,这种情况称为全反射。产生全反射的条件可以通过对折射角的分析来确定。根据斯涅耳折射定律,有

$$\sin \theta_t = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 / \mu_2 \varepsilon_2} \sin \theta_i \quad (9.81)$$

当 $\varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$,即电磁波从光密媒质入射到光疏媒质时,入射角 θ_i 若大于一定的数值后,将会出现 $\sin \theta_t > 1$ 的情况,此时,在实数域内不存在确定的折射角,我们说此时发生了全反射。发生全反射的最小入射角是 $\sin \theta_t = 1$ 时的角,称其为临界角,记为 θ_c 。令式(9.81)等于1,则可得

$$\sin \theta_c = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 / \mu_1 \varepsilon_1} \quad (9.82)$$

对于一般非磁性媒质,因为 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$,所以

$$\sin \theta_c = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1} \quad (9.83)$$

9.7 反射波的相位变化

式(9.39)和式(9.44)描述了入射场与反射场之间的关系,为了讨论方便,将它们重写如下:

$$\begin{aligned} \text{当 } \mathbf{E} \text{ 垂直于入射平面时} \quad \mathbf{E}'_0 &= \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \mathbf{E}_0 \\ \text{当 } \mathbf{E} \text{ 平行于入射平面时} \quad \mathbf{B}'_0 &= -\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \mathbf{B}_0 \end{aligned}$$

由式(9.39)可知,若其中两正弦项之比值为正,则 \mathbf{E}'_0 和 \mathbf{E}_0 方向相同。由于角度 $(\theta_t + \theta_i)$ 只能在 0 和 π 之间,所以 $\sin(\theta_t + \theta_i)$ 总是正值。然而,角度 $(\theta_t - \theta_i)$ 在 0 和 $-\pi/2$ 之间,所以当 $\theta_i > \theta_t$ 时 $\sin(\theta_t - \theta_i)$ 将为负值。于是,根据斯涅耳定律,条件 $\theta_i > \theta_t$ 和 $n_2 > n_1$ 可以看成是等价的。

因此,当入射波从折射率较大的介质被反射时,从式(9.39)可知,对于与入射平面相垂直的电场分量而言,入射场与反射场的方向在边界处是相反的,即如果 $n_2 > n_1$,则电场的垂直分量的相位将会发生 180° 的变化,如图9.4所示。

那么,当电场平行于入射平面时,又会发生怎样的情况呢?这时,磁场之间的关系如式(9.44)所示。如果磁场的相位发生变化,那么 $[-\tan(\theta_t - \theta_i)/\tan(\theta_t + \theta_i)]$ 的符号肯定是负的。而当 $(\theta_t + \theta_i) < \pi/2$ 时, $\tan(\theta_t + \theta_i)$ 为正值;若这时又有 $\theta_i > \theta_t$,则 $[-\tan(\theta_t - \theta_i)]$ 也为正值,所以,当 $n_2 > n_1$ 并且 $(\theta_t + \theta_i) < \pi/2$ 时,磁场的相位不会发生变化。在入射角大于布儒斯特角的情况下,就有 $(\theta_t + \theta_i) > \pi/2$,那么 $\tan(\theta_t + \theta_i)$ 将为负值,这时入射磁场与反射磁场之间的相位一定会发生变化,两者相差 180° ,如图9.5所示。

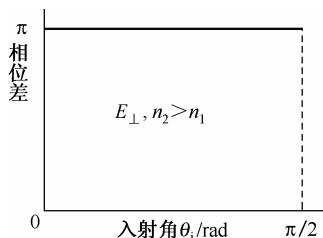


图 9.4 与入射平面相垂直的电场分量的相位变化

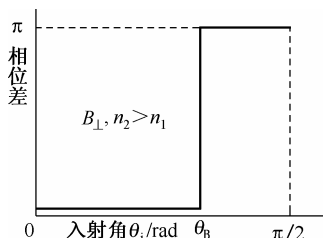


图 9.5 入射角等于布儒斯特角时的相位突变

在图9.5中可以看到，当入射角等于布儒斯特角时会发生相位突变，但这并不能说明这个特殊的入射角好像就是一个开关装置。正如在上面所证明的那样，对于入射平面的电场来说，以布儒斯特角反射的反射波，其振幅等于零。

然而，并不能说由磁场得到的结果与在电场中得到的结果是一样的，为了从磁场得到电场，必须利用式(9.41)，即

$$\mathbf{E} = \frac{c^2}{\omega n^2} \mathbf{B} \times \mathbf{k}$$

电场的方向并不仅仅决定于 \mathbf{B} ，还需要考虑由 \mathbf{k} 所确定的传播方向。显然，入射波与反射波的传播方向是不同的，这时，若要对入射波与反射波的相位关系进行讨论，实际上只需要考虑入射角的两种极端情况：(a) $\theta_i \rightarrow 0$ 和 (b) $\theta_i \rightarrow \pi/2$ 。当 $\theta_i \rightarrow 0$ 时，入射波与反射波的传播方向相反，这样就有

$$\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$$

$$\text{于是} \quad \mathbf{E}'_0 / E'_0 = -\mathbf{E}_0 / E_0 \quad (9.84)$$

这正好符合当 $\theta_i > \theta_i$ 即 $n_2 > n_1$ 时相位变化 180° 的情况。因此，对于法向入射波来说，如果 $n_2 > n_1$ ，那么不论电场相对于入射平面的角度是多少，反射时其相位都将改变 180° ，如图9.6所示。

另一极端情况是切向入射，即 $\theta_i \rightarrow \pi/2$ ，此时反射波与入射波的传播方向相同，如图9.7所示，这时有

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}'$$

于是两个电场和两个磁场具有相同的相位关系，因而当 $\theta_i \rightarrow \pi/2$ 时，入射电场和反射电场的相位相差 180° 。

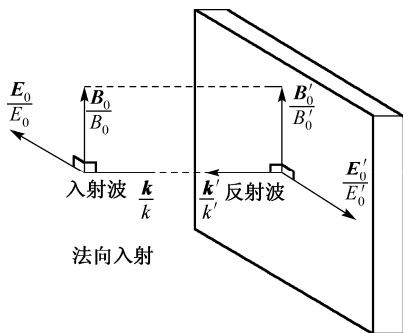


图 9.6 波的法向入射

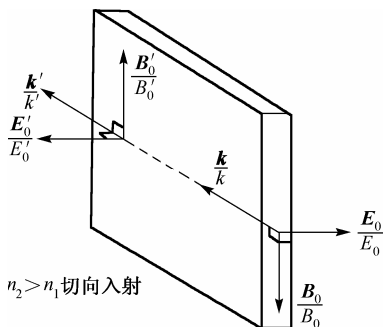


图 9.7 波的切向入射

当 $n_2 < n_1$ 时，相位关系正好反过来。图9.8和图9.9描述了上面所讨论的结果。

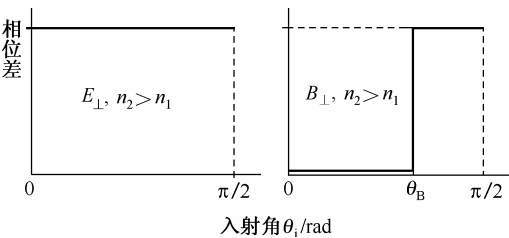


图 9.8 $n_2 > n_1$ 时的相位变化情况

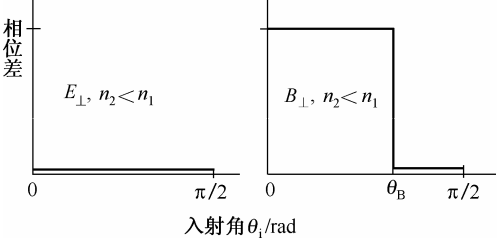


图 9.9 $n_2 < n_1$ 时的相位变化情况

对于场 **B** 和 **E**，其相位关系可以利用

$$\mathbf{B} = (1/\omega)\mathbf{k} \times \mathbf{E} \tag{9.85}$$

和

$$\mathbf{E} = (c^2/\omega n^2)\mathbf{B} \times \mathbf{k} \tag{9.86}$$

得到。

9.8 各向异性媒质中的平面电磁波

在本书的所有分析中，所考虑的介质都是各向同性的，即在介质的任一点上沿各个方向的性质都是一样的，外加电磁场的取向并不影响介质的性质。同时又假设折射率为实数，也就是说介质是“无损耗的”。此外，还认为介质是均匀的，即它们没有缺损或杂质，结构上处处完全一致。然而，实际的介质并不是均匀的，不均匀处就像一些小的分界那样，在介质中会产生反射。固体材料中的空穴就是这样的例子。假设空穴处为真空，那么当波穿过空腔时，其折射率的值将先从介质时的值减小到真空时的值，然后又很快变回为前者。正如在上面所讨论的那样，空隙除了会引起折射率变化之外，还会使波产生反射。所以，介质如果是很透明的话，那么它一定要尽可能地均匀。成粒子状的气体 and 液体就是透明的，当然在第 7 章中所讨论的那些能吸收波谱的特殊介质除外。在电磁波谱的可见光范围内，这些介质由于会吸收特定频率的波段将会呈现一定的颜色，否则它们就是透明的。在第 11 章中，我们在讨论电磁辐射的散射问题时将再一次涉及介质内部的反射问题。

对于实际的介质来说，不均匀性只是问题的一个方面。另一个更重要的问题是，介质的性质往往可能会与外加电场或磁场的取向有关。我们将这种电磁特性与外加电磁场方向有关的媒质称为各向异性媒质，也就是说，这种媒质的介电常数 ϵ 、磁导率 μ 或电导率 γ 与外部电场或磁场的取向有着密切的关系。尽管实际情况中可能只是上述三个参数中的某一个参数与外部电场或磁场有关，但它毕竟从整体上来说，已对各向同性媒质所衍生出来的理论和分析方法产生了影响。

描述各向异性媒质的参量将不再是标量而是张量，但麦克斯韦方程组的形式不变。等离子体和铁氧体在恒定外磁场的作用下都具有各向异性的特征，对电磁波的传播有很大影响。当平面波在磁化等离子体中传播时，会出现双折射效应和法拉第旋转效应。前者是指，一个线极化波入射这种媒质时，折射波会分解为两个传播方向不同的波；后者是指，线极化波在该媒质中沿外加磁场 \mathbf{B}_0 方向纵向传播时，其极化面会以 \mathbf{B}_0 为轴发生旋转；而当横向传播时，波将会分为独立的两种波：寻常波和非寻常波。而当一个线极化波入射到饱和磁化铁氧体这样的媒质中时，折射波会分解为两个波数不同的波；当纵向传播时，它同样具有法拉第旋转效应，且不可逆。当横向传播时，一个波为寻常波，另一个波为非寻常波。对于这些问题，我们将不在本书中进行讨论。

本章小结

1. 波在边界上被反射或透射时，其频率不会发生变化。
2. 入射波、反射波和透射波均在同一平面上传播，这个平面就是入射平面。
3. 入射角 θ_i 等于反射角 θ_r 。
4. 折射率为 n_1 的介质中的入射角 θ_i 与折射率为 n_2 的介质中的折射角之间的关系由斯涅耳定律——即折射定律所给定：

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i$$

5. 如果 \mathbf{E} 平行于入射平面，则反射波的电场强度 E'_0 与入射波的电场强度 E_0 之比为

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}$$

如果 \mathbf{E} 与入射面垂直，则

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

6. 如果 \mathbf{E} 平行于入射平面，则透射波的电场强度 E''_0 与入射波的电场强度 E_0 之比为

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{n_1}{n_2} \left[\frac{2}{1 + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t} \right]$$

如果 \mathbf{E} 垂直于入射面，则

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{2}{1 + \tan \theta_i \cot \theta_t}$$

7. 垂直极化波的电场反射系数 $R_\perp = \frac{E'_0}{E_0} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$ ；

$$\text{垂直极化波的电场折射系数 } T_\perp = \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}；$$

$$\text{平行极化波的电场反射系数 } R_\parallel = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}；$$

$$\text{平行极化波的电场折射系数 } T_\parallel = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}。$$

8. 在入射波的角度为布儒斯特角 θ_B 的情况下，有 $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ ，这时反射会发生完全极化，而反射波中的电场只有垂直于入射面的分量。
9. 在法向入射情况下，反射波与入射波的强度之比为

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E'_0}{E_0} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

10. 当电磁波由光密媒质入射到光疏媒质上时， $\eta_2 > \eta_1$ ， $R > 0$ ，分界面处为电场的波腹、磁场的波节；而距离分界面 $\lambda/4$ 处，为电场的波节和磁场的波腹。当电磁波由光疏媒质入射到光密媒质上时， $\eta_2 < \eta_1$ ， $R < 0$ ，分界面处为电场的波节、磁场的波腹；而距离分界

面 $\lambda_1/4$ 处, 为电场波腹的和磁场的波节。

11. 电场或磁场的最大振幅与最小振幅之比称为驻波比或驻波系数, 记为 S_w , 即

$$S_w = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{1+|R|}{1-|R|}$$

反之, 也可用驻波系数 S_w 表示反射系数 $|R|$:

$$|R| = \frac{S_w - 1}{S_w + 1}$$

在行驻波混合状态下, 可以定义行波系数, 记为 K_w , 即

$$K_w = \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \frac{H_{\min}}{H_{\max}} = \frac{1-|R|}{1+|R|} = \frac{1}{S_w}$$

同样, 也可用行波系数 K_w 表示反射系数 $|R|$:

$$|R| = \frac{1-K_w}{1+K_w}$$

12. 发生全折射时对应的入射角就是布儒斯特角 θ_B 。

13. 发生全反射的最小入射角是 $\sin \theta_t = 1$ 时的角, 我们称其为临界角, 记为 θ_c , 并且

$$\sin \theta_c = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 / \mu_1 \varepsilon_1}$$

14. 反射波的相位变化由以下方程确定:

第一种情况, 对于 E_{\perp} :

$$E'_0 = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} E_0, \quad \mathbf{B} = \left(\frac{1}{\omega} \right) \mathbf{K} \times \mathbf{E}$$

这是电场分量垂直于入射平面时的结果。

第二种情况, 对于 E_{\parallel} :

$$B'_0 = -\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} B_0, \quad \mathbf{E} = \left(\frac{c^2}{\omega n^2} \right) \mathbf{B} \times \mathbf{K}$$

这是磁场分量垂直于入射平面时的结果。其相位关系如图9.10所示。

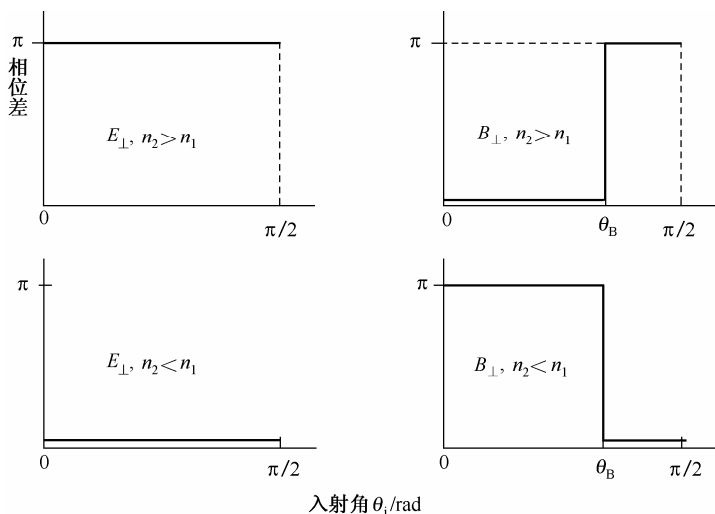


图 9.10 相位变化情况

习 题 9

9.1 已知布儒斯特角 $\theta_B = \arctan(n_2/n_1)$ ，试分别计算在 (a) 空气与玻璃的分界面和 (b) 空气与水的分界面上，可见光完全极化反射情况下的入射角。设空气、水和玻璃的折射率分别近似为 1.00、1.33 和 1.52，并设可见光是被折射率较高的媒质所反射的。

9.2 根据式 (9.40) 和式 (9.47)，证明在法向入射的情况下，透射场与入射场的比率为

$$E_0''/E_0 = 2/[1 + (n_2/n_1)]$$

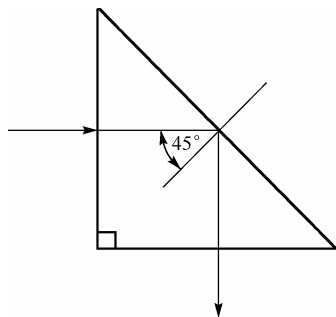
9.3 电磁波谱中频率较宽的红外波需要在特殊媒质中才能传播，常用的两种媒质是溴化钾 (在波长 $\lambda = 5 \mu\text{m}$ 之处的折射率为 1.54) 和氯化银 (在 $\lambda = 5 \mu\text{m}$ 之处的折射率为 2.00)，试计算红外波法向穿过这些媒质所组成的平行的平面窗口时能量损失的百分率。假定荧光屏置于空气中 (折射率为 1.00)，波在窗口表面反射时仅发生能量损失。提示：请注意反射波在各个分界面上的相位变化和电场的边界条件。

9.4 试证明：当入射角 θ_i 大于临界角 θ_c 时，必有反射系数等于 1。

9.5 (1) 试证明：如果式 (9.39) 和式 (9.44) 中的 $\theta_i = \pi/2$ ，则入射波与反射波的幅值相同。在这样的条件下，所有能量会被“完全内反射”。(2) 用斯涅耳定律证明，对于所有大于临界角 θ_c [$\theta_c = \arcsin(n_1/n_2)$] 的入射角都将发生能量的完全内反射；并计算可见光在玻璃/空气界面上发生完全内反射时的临界角。玻璃和空气的折射率分别为 1.52 和 1.00。

9.6 许多光学仪器都是利用了普通玻璃的完全内反射临界角总是小于 45° 这一特点制作的，当可见光穿过题 9.6 图所示的棱镜时，完全内反射的能量的损失很小。设棱镜置于空气 (折射率为 1.00) 中，并设对于可见光玻璃的折射率约为 1.52，试计算能量损失的百分率。

9.7 平行极化的平面电磁波，由 $\epsilon_r = 2.56$ 、 $\mu_r = 1$ 和 $\gamma = 0$ 的媒质入射到空气中，试问：(1) 波能否全部折射入空气中？若能，其条件是什么？(2) 波能否全部反射回媒质中？若能，其条件是什么？(3) 当波从空气中斜入射到媒质中，重答 (1) 和 (2)。



题 9.6 图 光穿过棱镜时的折射

9.8 垂直极化的平面电磁波, 由 $\varepsilon_r = 2.56$, $\mu_r = 1$ 和 $\gamma = 0$ 的媒质斜入射到空气中, 试问: (1) 波能否发生全反射现象? 为什么? (2) 波能否发生全折射现象? 为什么? (3) 当波从空气中斜入射到媒质中, 重答(1)和(2)。

9.9 水底下光源射出来的垂直极化电磁波以 $\theta_i = 20^\circ$ 的入射角入射到水与空气的界面, 水的 $\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ 。试求: (1) 临界角 θ_c ; (2) 反射系数 R_\perp ; (3) 折射系数 T_\perp 。

9.10 媒质 1 为理想媒质, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\mu_r = \mu_0$, $\gamma_1 = 0$; 媒质 2 为空气。平面电磁波由媒质 1 向分界面上斜入射, 入射波电场与入射面平行。

(1) 当入射角 $\theta_i = 45^\circ$ 时, 试求: ① 全反射的临界角 θ_c ; ② 媒质 2(空气)中折射波的折射角 θ_t ; ③ 反射系数 R_\parallel ; ④ 折射系数 T_\parallel ;

(2) 当入射角 $\theta_i = 60^\circ$ 时, 试问: ① 是否满足无反射条件? 布儒斯特角 θ_B 是多少? ② 入射波在入射方向的相速 $v = ?$ ③ 入射波在 x 方向的相速 $v_x = ?$ ④ 入射波在 y 方向的相速 $v_y = ?$ ⑤ 在媒质 2 中, 波以什么速度传播及沿什么方向传播? ⑥ 在媒质 2 中, 波的平均功率流密度 S_{av} 是多少?

9.11 均匀平面波从自由空间垂直入射到某媒质平面时, 在自由空间形成驻波, 设驻波比为 2.7, 媒质平面上有驻波最小点, 求媒质的介电常数。

9.12 在自由空间中, 一均匀平面波垂直投射到半无限的无损媒质平面上, 已知在平面波自由空间中, 合成波的驻波比为 3, 媒质内传输波的波长比自由空间的波长缩短至原长的 $1/6$, 求媒质的相对磁导率 μ_r 和相对介电常数 ε_r 。

9.13 一线极化平面波从自由空间投射到 $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 4$ 的媒质分界面, 如果入射波的电场与入射波面的夹角为 45° , 试求: (1) 入射角 θ_i 为多少时, 反射波只有垂直极化波? (2) 此时反射波的平均功率流是入射波的百分之几?

9.14 假设聚苯乙烯的电磁参数为 $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2.3$, 损耗正切 $\tan \delta_c = \gamma/(\omega\varepsilon) = 2 \times 10^{-4}$, 一频率 $f = 100$ MHz 的平面电磁波在它的内部传播。试求: (1) 相速和衰减常数; (2) 电磁波经过传播距离 10 m 后, 功率密度下降的分贝数。

9.15 证明: 电磁波垂直入射到两种无损媒质的交界面上时, 若其反射系数与折射系数的大小相等, 则其驻波比为 3。

9.16 试证明: 在下述两种情况下, 分界面上无反射的条件是布儒斯特角与折射角之和为 $\pi/2$ 。(1) 垂直极化 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 但 $\mu_1 \neq \mu_2$); (2) 平行极化 ($\mu_1 = \mu_2$, 但 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$)。

9.17 电磁波从空气斜入射到某媒质参数为 $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2.5$ 的媒质平板上, 试求: (1) 使电磁波的电场平行于入射面时不产生反射的入射角; (2) 若电磁波是从该媒质入射到空气, 则在媒质与空气分界面处电磁波产生全反射时的临界角为多少?

9.18 一平面波从某媒质内斜入射到媒质与空气的分界面, 试求: (1) 当媒质分别为水 ($\varepsilon_r = 81$)、玻璃 ($\varepsilon_r = 9$)、聚苯乙烯 ($\varepsilon_r = 1.56$) 时的临界角; (2) 若入射角使波恰好掠过分界面, 波在空气中的衰减常数; (3) 若入射角等于布儒斯特角 ($\theta_i = \theta_B$), 则波全部透射到空气中, 上述三种媒质的 θ_B 分别是多少?

9.19 一垂直极化波从媒质 ($\mu_1 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$) 斜入射到磁性材料 ($\mu_2 = \mu_r \mu_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$), 试证明: 这时也存在一个无反射的布儒斯特角。

9.20 频率 $f = 300$ MHz 的均匀平面波, 从 $\mu_r = 9$, $\varepsilon_r = 4$ 的媒质中入射到与空气的分界面上, 试求: (1) 波在两种媒质中的波长; (2) 临界角 θ_c ; (3) 若该平面波是圆极化波, 欲在空气中得到单一线极化波, 应以什么角度入射?

9.21 对于在布儒斯特角 θ_B 附近入射的平行极化波, 反射波中 E_x 的相位与入射波中 E_x 的相位之间相差多大? 对于 $z < 0$ 的半空间的驻波有什么影响?

9.22 求光线自玻璃($n_1=1.5$)到空气($n_2=1$)的临界角和布儒斯特角,并证明:在一般情况下,临界角总是大于布儒斯特角。

9.23 有一个线极化波经媒质面全反射后,(1)证明:反射波电场 \mathbf{E} 的平行分量 $E_{0//}''$ 和垂直分量 $E_{0\perp}'$ 之间的相位差为 $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta}$, 其中 $n_{21} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ 是相对折射率;(2)问在什么条件下,反射波是线极化的?(3)在什么条件下,反射波是圆极化的?

9.24 平面电磁波从空气斜入射到一介质表面,电介质 $\mu_r=1$, $\varepsilon_r=3$,入射角 $\theta_i=60^\circ$,入射波的电场振幅 $E_0=1\text{ V/m}$,试分别计算垂直极化和平行极化两种情况下的反射波和折射波。

9.25 设一圆极化波由空气斜入射到 $\varepsilon_r=3.78$ 的平面媒质上,入射角 $\theta_i=60^\circ$,求折射角、反射系数和折射系数。

第 10 章 导行电磁波

前面研究了电磁波在无界空间与媒质中的传播,也研究了电磁波在两种不同媒质交界面处的反射与折射,本章将要较为深入地讨论电磁波在导波系统中的传播问题。

用来将电磁能量从一处传输到另一处(例如在电视接收机中由天线传输到高频头)的装置称为**导波系统**或**传输线**。导波系统一般是一个封闭的电磁系统,它可以导引电磁波在其中传播,人们把被导引的电磁波称为**导行电磁波**。传输线的种类繁多,一般按其上传播的导行电磁波的特征可分为三种类型:(1)TEM 波传输线,如双导线、同轴线、微带线等;(2)波导传输线,如矩形波导、圆柱形波导等;(3)表面波传输线,如介质波导等。波导与介质波导是非 TEM 波传输线。

平行双导线是最简单的 TEM 波传输线,电磁波在沿该传输线传输时没有纵向(轴向)电磁场分量。但随着工作频率的升高,其辐射损耗急剧增加,故双导线仅用于米波和分米波的低频段。同轴线没有电磁辐射,工作频带很宽。微带线可采用印制电路制作技术,在微波集成电路中得到了广泛应用。波导是用金属管制作的传输线,电磁波在管内传播,损耗很小,主要用于 3~30 GHz 的频率范围。介质波导主要用于毫米波到光波波段,光纤就属于介质波导。

传输线的分析方法有基于场的分析方法和基于路的分析方法两种。基于场的分析方法是从麦克斯韦方程组出发,求解满足边界条件的波动方程,再求出传输线中的电场和磁场,进而分析传输线的传输特性,对矩形波导的分析通常就是采用这种方法。基于路的分析方法是在一定条件下,把电磁场问题转化为电路的问题来处理,求出传输线上的电压、电流,进而分析传输线的传输特性,对 TEM 波传输线的分析一般可采用这种方法。

本章将重点讨论结构简单也最重要的平行传输线、矩形波导和圆柱形波导。在讨论平行传输线时若无特别说明,均默认为均匀传输线。均匀传输线是指横截面形状不变、尺寸不变、制造材料不变、填充材料不变的无限长直传输线。

10.1 电磁波在均匀导波装置中传播的一般特性

10.1.1 电磁波在均匀导波装置中的传播

电磁波沿传输线传输的问题是一类典型而简单的电磁场边值问题,它可以分为两个问题来研究。一个问题是研究电磁场的**横向分布特性**,即研究与传输线轴线垂直的传输线横截面上的场分布;另一个问题是研究电磁波沿传输线轴线的**纵向传播特性**。根据这些分析,可以了解在各种导波装置中电磁波的传播特性,并由此对波导提出合理的设计方法,以尽可能提高电磁波的传输效率。

为此把电磁波沿均匀波导装置传播分为纵向场分量与横向场分量来研究,为了讨论问题方便,采用正交坐标系 (x, y, z) ,其中 x 和 y 为导波装置横截面上的坐标, z 为纵向坐标。场强的纵向分量用 $E_z(x, y, z)$ 和 $H_z(x, y, z)$ 来表示,场强的横向分量用 $E_t(x, y, z)$ 和 $H_t(x, y, z)$ 表示,于是场强矢量可表示为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_t(x, y, z) + \mathbf{E}_z(x, y, z) = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z \quad (10.1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_t(x, y, z) + \mathbf{H}_z(x, y, z) = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z \quad (10.2)$$

另外, 将哈密顿算子分解为与横截面坐标有关的分量 ∇_t 和与纵坐标有关的分量 ∇_z , 即

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z \quad (10.3)$$

下面我们就从麦克斯韦方程组和波动方程出发去求解在均匀波导装置中场分量之间的关系, 为了简单起见, 假设波导装置中充满的媒质是无损耗的。

设电磁波沿正 z 方向传播, 对于角频率为 ω 的正弦电磁波, 它满足无源区域的时谐麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (10.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad (10.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (10.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (10.7)$$

利用式(10.1)~式(10.3), 从上述方程得

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = i\omega\epsilon\mathbf{E}_z \quad (10.8)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_z + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = i\omega\epsilon\mathbf{E}_t \quad (10.9)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -i\omega\mu\mathbf{H}_z \quad (10.10)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_z + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = -i\omega\mu\mathbf{H}_t \quad (10.11)$$

整理得

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E}_t = \frac{\partial}{\partial z}\nabla_t\mathbf{E}_z + i\omega\mu\mathbf{e}_z \times \nabla_t\mathbf{H}_z \quad (10.12)$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{H}_t = \frac{\partial}{\partial z}\nabla_t\mathbf{H}_z - i\omega\epsilon\mathbf{e}_z \times \nabla_t\mathbf{E}_z \quad (10.13)$$

式中, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 为电磁波在无限大理想均匀媒质中的传播系数。

对于正弦电磁波, 波动方程(亥姆霍兹方程)为

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \quad (10.14)$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0 \quad (10.15)$$

对于电场和磁场的横向分量和纵向分量, 方程变为

$$\nabla^2\mathbf{E}_t + k^2\mathbf{E}_t = 0 \quad (10.16)$$

$$\nabla^2\mathbf{E}_z + k^2\mathbf{E}_z = 0 \quad (10.17)$$

$$\nabla^2\mathbf{H}_t + k^2\mathbf{H}_t = 0 \quad (10.18)$$

$$\nabla^2\mathbf{H}_z + k^2\mathbf{H}_z = 0 \quad (10.19)$$

由分离变量法可知, 式(10.16)~式(10.19)中 \mathbf{E}_z 和 \mathbf{H}_z 的解可表示为 $f(x, y)e^{-\Gamma z}$ (传播系数 $\Gamma = \alpha + i\beta$) 的形式, 由式(10.12)和式(10.13)可将横向场分量与纵向场分量间的关系表示成

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{k^2 + \Gamma^2} (-\Gamma \nabla_t E_z + i\omega\mu \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z) \quad (10.20)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{k^2 + \Gamma^2} (-\Gamma \nabla_t H_z - i\omega\varepsilon \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z) \quad (10.21)$$

并且
$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t + (k^2 + \Gamma^2) \mathbf{E}_t = 0 \quad (10.22)$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{H}_t + (k^2 + \Gamma^2) \mathbf{H}_t = 0 \quad (10.23)$$

将算子 ∇^2 分解为与横截面坐标有关的分量 ∇_t^2 和与纵坐标有关的分量 $\partial^2/\partial z^2$ ，即

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

根据第 1 章的知识可知，在笛卡儿坐标系中

$$\nabla_t = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

将其代入式(10.20)和式(10.21)，可得笛卡儿坐标系中横向场分量的表达式为

$$E_x = \frac{-\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\omega\mu}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (10.24)$$

$$E_y = \frac{-\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{i\omega\mu}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (10.25)$$

$$H_x = \frac{-\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{i\omega\varepsilon}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (10.26)$$

$$H_y = \frac{-\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{i\omega\varepsilon}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (10.27)$$

在圆柱坐标系中，

$$\nabla_t = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

则圆柱坐标系中横向分量的表达式为

$$E_r = -\frac{\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\omega\mu}{k^2 + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (10.28)$$

$$E_\varphi = -\frac{\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \frac{i\omega\mu}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (10.29)$$

$$H_r = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2 + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (10.30)$$

$$H_\varphi = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2 + \Gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (10.31)$$

10.1.2 均匀导波装置中的TEM波、TE波和TM波

根据电磁波在波导中传播时的纵向电场或磁场分量是否为零，可将波导中的导行波分为以下三种模式。

(1) $E_z = 0$ 和 $H_z = 0$ 的电磁波, 即在电磁波传播方向上没有电场和磁场分量, 这种模式的电磁波称为**横电磁波**, 即 TEM 波。

(2) $E_z = 0$ 和 $H_z \neq 0$ 的电磁波, 即在电磁波传播方向上没有电场分量, 但有磁场分量, 这种模式的电磁波称为**横电波**或**磁波**, 即 TE 波或 H 波。

(3) $E_z \neq 0$ 和 $H_z = 0$ 的电磁波, 即在电磁波传播方向上有电场分量, 但没有磁场分量, 这种模式的电磁波称为**横磁波**或**电波**, 即 TM 波或 E 波。

上述分类方法并不是唯一的, 导行波还可以按有无 x 分量或有无 y 分量进行分类。实际上得到的许多问题的解答多半属于上面三种模式, 它们构成一组完备的解, 其他任何形式的场分布都可以表示为一个或多个模式的线性组合。

下面分别讨论它们的求解方法和传输特性。

(1) 对于横电磁波(TEM 波), 由于 $E_z = 0$ 和 $H_z = 0$, 要使 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 不为零, 则由式(10.20)和式(10.21), 有

$$\Gamma^2 + k^2 = 0 \quad (10.32)$$

由式(10.22)和式(10.23), 可得 TEM 波横向电磁场分布函数应满足的方程为

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t = 0 \quad (10.33)$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{H}_t = 0 \quad (10.34)$$

这与无源区中二维静态场所满足的拉普拉斯方程的形式完全相同。从数学上讲, 这两种形式的方程的求解是同一类数学问题, 于是可以得到以下两个重要的结论。

① 任何能确立静态场的均匀导波装置也能维持 TEM 波, 如双线传输线、同轴线系统, 而无限长空心波导管内则不可能存在 TEM 波。

② 波导系统中 TEM 波的横向场分布应与该系统中二维静态场分布具有相同的形式, 但是 TEM 波中横向场是时变场, 应该加上传播项 $e^{-\Gamma z}$ 。

对于 TEM 波, 由于 $\Gamma^2 + k^2 = 0$, 所以

$$\Gamma = i\beta = ik = i\omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.35)$$

式中, $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 为**相位系数**。可求得 TEM 波传播的**相速**为

$$v_p = \omega/\beta = 1/\sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.36)$$

它仅与媒质参数有关, 而与导波装置的几何形状无关, 并且相速不随频率变化, 不存在**色散**现象。这表明 TEM 波是非色散波, 当电磁波在波导装置中以 TEM 波传播时将不会产生失真。

TEM 波的波阻抗为

$$Z_{\text{TEM}} = E_x/H_y = -E_y/H_x = i\omega\mu/\Gamma = \Gamma/i\omega\epsilon = \sqrt{\mu/\epsilon} = \eta \quad (10.37)$$

它与无限均匀媒质的本征阻抗相同。

TEM 波的场量间关系式为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_{\text{TEM}}} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \quad (10.38)$$

(2) 对横电波(TE 波), 因为 $E_z = 0$, 故由式(10.20)和式(10.21)可得

$$\mathbf{E}_t = \frac{i\omega\mu}{k^2 + \Gamma^2} \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z \quad (10.39)$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \nabla_t H_z \quad (10.40)$$

TE 波的波阻抗为

$$Z_{\text{TE}} = E_x / H_y = -E_y / H_x = i\omega\mu / \Gamma \quad (10.41)$$

TE 波的场量间关系式为

$$\mathbf{E} = -Z_{\text{TE}}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \quad (10.42)$$

(3) 对于横磁波(TM 波), 因为 $H_z = 0$, 故

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\Gamma}{k^2 + \Gamma^2} \nabla_t E_z \quad (10.43)$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2 + \Gamma^2} \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z \quad (10.44)$$

TM 波的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = E_x / H_y = -E_y / H_x = \Gamma / i\omega\varepsilon \quad (10.45)$$

TM 波的场量间关系式为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_{\text{TM}}}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \quad (10.46)$$

10.1.3 均匀导波装置中的导行波传输特性

从上面的分析中可以发现, 导行波的场量中都有因子 $e^{-\Gamma z}$, 其中传播常数 $\Gamma = \alpha + i\beta$ 对应于沿着 z 方向传播的波。

若令 $h^2 = k^2 + \Gamma^2$, 则对于理想的导波系统来说, $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为实数, 而与传播系数有关的参数 h 则由导波装置的横截面的边界条件所决定, 也是实数。于是随着工作频率的不同, 传播常数 Γ 可能有下面三种情况。

(1) $\Gamma^2 < 0$, 即 $\Gamma = i\beta$ (β 为实数, 称为相位常数), 此时导行波的场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (10.47)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (10.48)$$

这是在波导装置中传输的波, 它在传输过程中振幅不变, 相位随传播距离增加而连续滞后。

(2) $\Gamma^2 > 0$, 即 $\Gamma = \alpha$ (α 为正实数, 称为衰减系数), 此时导行波的场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{i\omega t}e^{-\alpha z} \quad (10.49)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)e^{i\omega t}e^{-\alpha z} \quad (10.50)$$

可以看出, 它们是振幅沿 z 轴方向呈指数规律衰减、相位不变的时谐振荡电磁场, 称为凋落场, 这时波导装置中没有波的传输, 称此状态为截止状态。

(3) $\Gamma = 0$, 这是介于传输状态与截止状态之间的一种状态, 称其为临界状态, 是某种传输模式能否传播的分界线。由此所决定的频率为该模式能否传播的临界频率或截止频率, 用 f_c 表示。相应的波长称为临界波长或截止波长, 用 λ_c 表示。 f_c 和 λ_c 是色散传输系统中两个重要

的特性参数,它反映了传输系统的基本传输特性,即在给定的 TE、TM 波传输系统内传输某个模式的电磁波时,其工作频率必须高于该模式的截止频率,其工作波长必须小于该模式的截止波长,这时传输系统相当于是一个高通滤波器。

下面来求出截止频率和截止波长。因为 $\Gamma = 0$, 所以有 $h^2 = k^2 = \omega_c^2 \mu \varepsilon$, 于是可得

$$\omega_c = h / \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (10.51)$$

$$\text{截止频率为} \quad f_c = h / 2\pi \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (10.52)$$

$$\text{截止波长为} \quad \lambda_c = v / f_c = 2\pi / h \quad (10.53)$$

其中 $v = 1 / \sqrt{\mu \varepsilon}$ 为无限媒质中电磁波的波速,此时 h 称为截止波数,且有

$$h = 2\pi / \lambda_c \quad (10.54)$$

于是可知,在导波系统中传播 TE 波或 TM 波的条件为

$$f > f_c \quad \text{或} \quad \lambda < \lambda_c \quad (10.55)$$

对于 TEM 波,由于 $h = 0$, 即 $f_c = 0$, $\lambda_c \rightarrow \infty$, 因此在任何频率下,TEM 波都能满足 $f > f_c = 0$ 的传输条件,均为传输状态,也就是说 TEM 波不存在截止频率。

对于给定尺寸的波导传输系统,可以通过填充 μ 或 ε 较大的媒质来降低截止频率,这种方法在微波工程中常被采用。

下面我们来讨论 TE、TM 波的速度。因为导行波的相速为

$$v_p = \omega / \beta \quad (10.56)$$

此时导波装置处于传播状态,因此 $\Gamma^2 < 0$, Γ 为纯虚数,且 $\Gamma = i\beta = i\sqrt{k^2 - h^2}$, 则相位常数为

$$\beta = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (10.57)$$

故在导波装置中传输 TE、TM 波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (10.58)$$

式中, $v = 1 / \sqrt{\mu \varepsilon}$ 为无限媒质中电磁波的波速。由式(10.58)可知,电磁波在波导中传播的相速大于它在无界空间的波速。

TE 波、TM 波的相速与波长和频率有关,因此传输 TE 波、TM 波的导波装置实际上是色散传输系统,这种色散称为几何色散。当信号以 TE 波或 TM 波在波导装置中传输时,随着传播距离的增加,色散引起的信号失真会变得越来越严重,若要减少信号失真,就应当尽量缩短信号在导波装置中的传播距离。

相速实际上是对幅度、相位和频率都没有受到调制的单一频率的行波而言的,这种波不载有任何信息。若要使波载有信息,则必须对波的幅度、相位或频率进行调制,调制后的波就不再是单一频率的,而是包含多个频率成分。这种由多个频率成分构成的“波群”的速度,就是前面介绍过的群速 v_g 。群速实际上是一组角频率 ω 、相位常数 β 都非常相近的波在传播过程中的“共同”速度,这个速度代表信息的传播速度。已知群速为

$$v_g = d\omega / d\beta \quad (10.59)$$

对式(10.58)两边求微分,可以得到导波装置中信号传播速度(群速)为

$$v_g = d\omega/d\beta = v\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \quad (10.60)$$

由此可知,作为信号传输速度的群速总是小于相同无界媒质中同频率 TEM 平面波的相速,群速只有在频率范围很窄时才有意义。将式(10.58)与式(10.60)相乘可得

$$v_p v_g = v^2 \quad (10.61)$$

式(10.61)表明:电磁波能量在导波装置中的传播速度等于群速。

下面讨论波阻抗。对于 TE 波,其波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{\beta} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (10.62)$$

而对于 TM 波,其波阻抗则为

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\beta}{k} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (10.63)$$

于是可知,均匀波导装置中的波阻抗取决于工作频率、介质的电磁参数及横截面形状和尺寸。式(10.63)表明:在所有截面上,波阻抗都相同。

10.2 TEM 传输线

10.2.1 传输线方程及其时谐稳态解

由于 TEM 波传输线的横截面上场的分布与静态场相同,也就是说,TEM 波传输线横截面上场的性质除了随时间变化以外均与静态场相同。因此,可以在 TEM 波传输线的横截面上定义电压和电流。

利用笛卡儿坐标系,设均匀传输线沿 z 轴放置,如果电磁波沿 z 方向传输,则电磁场可以表示为

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y, t)e^{-\Gamma z} \quad (10.64)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_0(x, y, t)e^{-\Gamma z} \quad (10.65)$$

在坐标为 z 的横截面上,理想导体与理想导体之间的电压为

$$u(z, t) = \int_a^b \mathbf{E}(x, y, z, t) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.66)$$

将式(10.64)代入后得

$$u(z, t) = u_0 e^{-\Gamma z} \quad (10.67)$$

式中,

$$u_0 = \int_a^b \mathbf{E}_0(x, y, t) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.68)$$

只要积分路径在同一横截面上,则其值 u_0 与路径无关。TEM 波传输线一般都是双导体,任一导体在位置 z 处的电流为

$$i(z, t) = \oint_l \mathbf{H}(x, y, z, t) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.69)$$

将式(10.65)代入后得

$$i(z,t)=i_0e^{-\Gamma z} \tag{10.70}$$

式中,

$$i_0=\oint_l\boldsymbol{H}_0(x,y,t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{10.71}$$

其中, l 为在同一横截面上围绕该导体的闭合回路, $u(z,t)$ 及 $i(z,t)$ 表示电压波和电流波。如果只对电磁波沿传输线轴向的传输特性感兴趣, 而不关心电磁场在传输线横截面上如何分布, 那么用电压和电流进行分析要比直接对 \boldsymbol{E} 和 \boldsymbol{H} 分析简单得多。但对于非 TEM 波传输线, 如矩形波导, 不管该积分路径是否在同一横截面上, 电场的线积分总是与路径有关。因此, 电压、电流等概念这时就已失去了确切的意义, 其传输特性只能用电磁场的方法进行分析。

工程中常用的 TEM 波传输线可以工作在很宽的频率范围。例如, 同轴线的工作频率可以从 0 Hz 到几十 GHz。传输线的几何长度 l 与其工作波长 λ 之比(即 l/λ)称为传输线的电长度。如果传输线的几何长度比其上传输的电磁波的波长要长或者可以相比拟, 就称之为长线; 反之, 则称为短线($l/\lambda \ll 1$)。当然, 长线不一定很长, 短线也不一定很短, 它们是相对于工作波长而言的。例如, 传输射频电视用的同轴电缆, 虽然其长度有时只不过几厘米或几米, 但由于这个长度已经大于工作波长或者与工作波长差不多, 因此它仍为长线。相反, 输送市电的电力线, 即使长度在几千米以上, 但与市电的波长(6000 km)相比小得多, 因而仍为短线而不是长线。

长线与短线上的电磁波有什么不同呢? 在低频情况下, 由于波长较长, 如果传输线的长度很短, 即该线段与波长相比很小, 则该线段上各点的电压(或电流)的大小和方向可近似认为相同, 可视该线段为短线。如果频率升高, 波长变短, 虽然该线段长度没变, 但在某瞬时其上各点的电压(或电流)的大小和方向均不相同, 此时该线段应看成长线。本章讨论的传输线属于长线, 即沿传输线上各点的电压或电流均不相等, 它们既随时间变化, 又随位置变化。

为什么长传输线上各点的电压和电流不相同呢? 这与长传输线所具有的特性有关: ①由于电流流过导线使导线发热, 从而导线本身处处有电阻; ②由于导线间绝缘不理想而存在电流, 使得导线间处处有漏电导; ③由于导线之间有电压, 存在电场, 于是导线之间处处存在电容; ④由于导线中有电流, 使导线周围处处存在磁场, 因此导线上存在电感。这些电阻、电导、电容、电感在均匀传输线上是均匀分布的, 与低频电路中电阻器、电容器、电感器等元件不同, 前者的这些参数是沿线分布的, 称为**分布参数**; 而后的参数是集中在电路中的某些点上的, 称为**集总参数**。在低频或波长远大于传输线的长度时, 传输线上的这些电阻、电导、电容、电感等分布参数完全可以忽略。但当频率很高, 传输线的长度可与信号波长相比拟时, 这些分布参数就不能忽略了。所以在高频情况下, 传输线是具有分布参数的电路, 利用传输线的分布参数等效电路就可以解释电压、电流为什么会沿传输线变化。

用“路”的方法处理传输线问题时, 通常会使用这样的 4 个参数来进行描述: 单位长度的电阻 R_1 (Ω/m), 单位长度的电感 L_1 (H/m), 单位长度的电导 G_1 (S/m) 和单位长度的电容 C_1 (F/m)。表 10.1 中列出了平行双导线和同轴线的 4 个分布电路参数。

表 10.1 平行双导线和同轴线的 4 个分布电路参数

传输线 分布参数	平行双导线 导线轴心距离为 D , 导线直径为 d	同轴线 外导体半径为 b , 内导体半径为 a
$R_1/(\Omega/\text{m})$	$\frac{2}{\pi d} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}$	$\sqrt{\frac{f\mu}{4\pi\gamma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
$L_1/(\text{H}/\text{m})$	$\frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G_1/(\text{S}/\text{m})$	$\pi\gamma / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\gamma / \ln \frac{b}{a}$
$C_1/(\text{F}/\text{m})$	$\pi\epsilon / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\epsilon / \ln \frac{b}{a}$

表10.1中, ϵ 、 μ 和 γ 分别为介质的介电常数、磁导率和电导率, ω 和 f 分别为电磁波的角频率和频率。

假设平行双线传输线的始端接信号源 u_s , 终端接负载 Z_L , 如图10.1所示。

如果传输线是均匀的, 那么就可以在传输线上任意一点 z 处取线微元 dz 来进行研究。根据分布参数 R_1 、 L_1 、 G_1 、 C_1 的物理意义, dz 长度的传输线段上存在并联分布电容 $C_1 dz$ 、串联分布电感 $L_1 dz$ 、串联分布电阻 $R_1 dz$ 和并联分布漏导 $G_1 dz$ 。由此可根据“路”的分析方法画出 dz 传输线的等效电路, 如图10.2所示。

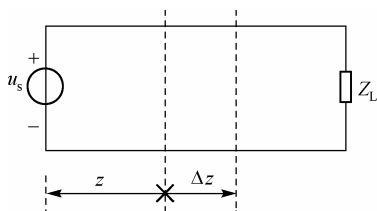


图 10.1 平行双线传输线

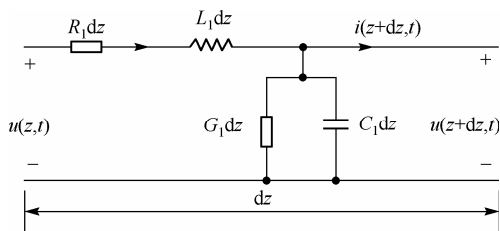


图 10.2 线元 dz 的等效电路

根据基尔霍夫定律, 得

$$u(z, t) - R_1 i(z, t) dz - L_1 \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} dz - u(z + dz, t) = 0 \quad (10.72)$$

$$i(z, t) - G_1 u(z + dz, t) dz - C_1 \frac{\partial u(z + dz, t)}{\partial t} dz - i(z + dz, t) = 0 \quad (10.73)$$

利用

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \frac{u(z + dz, t) - u(z, t)}{dz} \quad (10.74)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} \quad (10.75)$$

可得

$$-\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = R_1 i(z, t) + L_1 \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (10.76)$$

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = G_1 u(z, t) + C_1 \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad (10.77)$$

这就是**传输线方程**, 又称为电报方程。如果传输线上的电压和电流随时间 t 作时谐变化, 即电压和电流可表示为

$$u(z, t) = \text{Re}[U(z)e^{i\omega t}] \quad (10.78)$$

$$i(z, t) = \operatorname{Re}[I(z)e^{i\omega t}] \quad (10.79)$$

式中, $U(z)$ 和 $I(z)$ 分别为 z 处的复数电压和复数电流, 则式(10.76)和式(10.77)的复数形式为

$$-dU(z)/dz = (R_1 + i\omega L_1)I(z) \quad (10.80)$$

$$-dI(z)/dz = (G_1 + i\omega C_1)U(z) \quad (10.81)$$

将式(10.80)和式(10.81)对 z 求导, 可得

$$d^2U(z)/dz^2 = \Gamma^2 U(z) \quad (10.82)$$

$$d^2I(z)/dz^2 = \Gamma^2 I(z) \quad (10.83)$$

式中,
$$\Gamma = \sqrt{(R_1 + i\omega L_1)(G_1 + i\omega C_1)} = \alpha + i\beta \quad (10.84)$$

Γ 正是在前面所定义过的传播系数, 其中 α 为衰减系数(Np/m), β 为相位系数(rad/m), 式(10.82)和式(10.83)称为传输线的波动方程。式(10.82)的通解形式为

$$U(z) = A_1 e^{-\Gamma z} + A_2 e^{\Gamma z} \quad (10.85)$$

将其代入式(10.80), 得

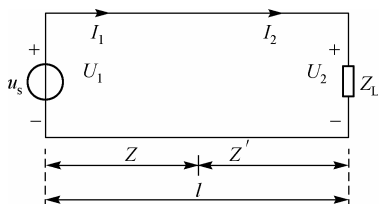
$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\Gamma z} - A_2 e^{\Gamma z}) \quad (10.86)$$

式中,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L_1}{G_1 + i\omega C_1}}$$

称为传输线的**特性阻抗**。式(10.85)中的积分常数 A_1 和 A_2 要由传输线的边界条件来确定。由式(10.85)和式(10.86)可知, 传输线上的电压和电流以波的形式传播, 通常把从电源流向负载的波称为入射波, 而把从负载传向电源的波称为反射波。在这种波的传播过程中, 电路的边界条件通常有以下三种情况:

- (1) 已知传输线的终端电压 U_2 和终端电流 I_2 ;
- (2) 已知传输线的始端电压 U_1 和始端电流 I_1 ;
- (3) 已知信号源的电动势、内阻抗和负载。



下面只讨论第一种边界条件的情况。如图10.3所示, 设传输线的终端电压 $U(l) = U_2$ 、终端电流 $I(l) = I_2$ 为已知, 由式(10.85)和式(10.86)可得

$$U_2 = A_1 e^{-\Gamma l} + A_2 e^{\Gamma l} \quad (10.87)$$

$$I_2 = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\Gamma l} - A_2 e^{\Gamma l}) \quad (10.88)$$

联立求解得
$$A_1 = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} e^{\Gamma l}, \quad A_2 = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2} e^{-\Gamma l} \quad (10.89)$$

将 A_1 、 A_2 代入式(10.85)和式(10.86), 得

$$U(z) = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} e^{\Gamma(l-z)} + \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2} e^{-\Gamma(l-z)} \quad (10.90)$$

$$I(z) = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} e^{r(l-z)} - \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2Z_0} e^{-r(l-z)} \quad (10.91)$$

为了讨论问题方便, 选取终端为坐标原点, 即图10.3中的 $z' = l - z$, 则以上两式变为

$$U(z') = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} e^{r z'} + \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2} e^{-r z'} \quad (10.92)$$

$$I(z') = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} e^{r z'} - \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2Z_0} e^{-r z'} \quad (10.93)$$

利用上述结果, 就可以进一步讨论传输线上反射波与入射波之间以它们与负载之间的相互关系, 即各种工作状态。

10.2.2 传输线的传输特性参数

1. 特性阻抗

传输线的特性阻抗 Z_0 等于传输线上任意点处的入射波电压 U^+ 与入射波电流 I^+ 之比, 或等于反射波电压 U^- 与反射波电流 I^- 之比的负值, 即

$$Z_0 = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-} = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L_1}{G_1 + i\omega C_1}} \quad (10.94)$$

对于无损耗传输线, 由于 $R_1 = 0$, $G_1 = 0$, 则

$$Z_0 = \sqrt{L_1/C_1} \quad (10.95)$$

在微波波段, 构成传输线的导体材料都是良导体, 传输线中填充的介质也是良介质, 一般都有 $R_1 \ll \omega L_1$ 、 $G_1 \ll \omega C_1$, 故工作在微波波段的传输线的特性阻抗 Z_0 可表示为

$$Z_0 = \sqrt{L_1/C_1} \quad (10.96)$$

由于传输线的分布参数 L_1 、 C_1 的大小均取决于传输线的结构、尺寸及填充的介质, 因此传输线的特性阻抗 Z_0 的大小也取决于传输线自身的结构、尺寸及填充的介质等参数, 而与源和负载的情况无关。

2. 传输系数

式(10.84)给出了传输线的传播系数的一般表达式, 其实部 α 和虚部 β 分别为

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} - (\omega^2 L_1 C_1 - R_1 C_1) \right]} \quad (10.97)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} + (\omega^2 L_1 C_1 - R_1 C_1) \right]} \quad (10.98)$$

衰减系数 α 表示传输线上单位长度行波电压(或电流)振幅的变化, 相位系数 β 表示传输线上单位长度行波电压(或电流)相位的变化。

对于无损耗传输线, $R_1 = 0$, $G_1 = 0$, 则

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_1 C_1} \quad (10.99)$$

对于在微波波段工作的传输线, 由于 $R_1 \ll \omega L_1$, $G_1 \ll \omega C_1$, 于是有

$$\alpha \approx \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (10.100)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_1 C_1} \quad (10.101)$$

3. 相速与波长

传输线中的相速为

$$v_p = \omega / \beta \quad (10.102)$$

在无损耗传输线和微波传输线中, 电压、电流波的相速则为

$$v_p = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_1 C_1} \quad (10.103)$$

波长为

$$\lambda = 2\pi / \beta \quad (10.104)$$

4. 电压反射系数

传输线上任意一点的反射波电压与入射波电压之比定义为该处的**电压反射系数**, 即

$$\rho(z') = \frac{U^-(z')}{U^+(z')} \quad (10.105)$$

以传输线终端为原点, 即 $z' = 0$, 根据式(10.92)和式(10.93)可得终端处的入射波电压和反射波电压分别为

$$U_2^+ = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2}, \quad U_2^- = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2}$$

将其代入式(10.92), 得

$$U(z') = U_2^+ e^{\Gamma z'} + U_2^- e^{-\Gamma z'} \quad (10.106)$$

则电压反射系数为

$$\rho(z') = \frac{U^-(z')}{U^+(z')} = \frac{U_2^- e^{-\Gamma z'}}{U_2^+ e^{\Gamma z'}} = \rho_2 e^{-2\Gamma z'} \quad (10.107)$$

$$\text{式中,} \quad \rho_2 = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{U_2 + I_2 Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| e^{i\varphi_2} \quad (10.108)$$

称为传输线的终端反射系数, 并且

$$\rho(z') = \rho_2 e^{-2\Gamma z'} = |\rho_2| e^{-2\alpha z'} e^{-i2\beta z'} e^{i\varphi_2} \quad (10.109)$$

对于无损耗传输线, $\alpha = 0$, 则

$$\rho(z') = |\rho_2| e^{-i2\beta z'} e^{i\varphi_2} \quad (10.110)$$

5. 输入阻抗

传输线上任一点的电压和电流的比值定义为该点朝负载端看去的**输入阻抗**, 即

$$\begin{aligned} Z_{in}(z') &= \frac{U(z')}{I(z')} = \frac{U_2 \cosh(\Gamma z') + I_2 Z_0 \sinh(\Gamma z')}{I_2 \cosh(\Gamma z') + \frac{U_2}{Z_0} \sinh(\Gamma z')} \\ &= Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\Gamma z')}{Z_0 + Z_L \tanh(\Gamma z')} \end{aligned} \quad (10.111)$$

式中, $Z_L = U_2/I_2$ 为终端负载阻抗。

对于无损传输线, $\Gamma = i\beta$, 则式(10.111)变为

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan(\beta z')}{Z_0 + iZ_L \tan(\beta z')} \quad (10.112)$$

10.2.3 无损传输线的工作状态

传输线上最基本的物理现象是反射。对无损传输线, 按反射系数模值的大小, 可将传输线的工作状态分为三种:

- (1) $\rho(z') = 0$ 的无反射工作状态, 即行波状态;
- (2) $|\rho(z')| = 1$ 的全反射工作状态, 即驻波状态;
- (3) $0 < |\rho(z')| < 1$ 的部分反射工作状态。

下面分别讨论这三种工作状态下传输线上电压、电流的分布情况及传输线的阻抗特性。

1. 行波状态(无反射状态)

当传输线终端负载阻抗等于传输线的特性阻抗, 即 $Z_L = Z_0$ 时, 反射系数 $\rho(z')$ 为零, 这时传输线处于行波状态。此时, 式(10.92)和式(10.93)中的等式右端第二项(反射波)为零, 因此

$$U(z') = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} e^{\Gamma z'} = U_2^+ e^{\Gamma z'} \quad (10.113)$$

$$I(z') = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} = I_2^+ e^{\Gamma z'} \quad (10.114)$$

对于无损传输线, $\Gamma = i\beta$, 则

$$U(z') = U_2^+ e^{i\beta z'} = |U_2^+| e^{i\theta_2} e^{i\beta z'} \quad (10.115)$$

$$I(z') = I_2^+ e^{i\beta z'} = |I_2^+| e^{i\theta_2} e^{i\beta z'} \quad (10.116)$$

式中, θ_2 是 U_2^+ 的初相角, 因 $Z_L = Z_0$ 是纯电阻, 则 $\theta_2 = \varphi_2$ 。其瞬时值形式为

$$u(z', t) = \text{Re}[U(z')] = |U_2^+| \cos(\omega t + \beta z' + \varphi_2) \quad (10.117)$$

$$i(z', t) = \text{Re}[I(z')] = |I_2^+| \cos(\omega t + \beta z' + \varphi_2) \quad (10.118)$$

从式(10.112)可以看出, 当 $Z_L = Z_0$ 时, 传输线上各点的输入阻抗为

$$Z_{in}(z') = Z_0 \quad (10.119)$$

以上结果说明, 在行波状态下的无损传输线有如下特点:

- (1) 沿传输线的电压、电流振幅不变;
- (2) 电压、电流同相, 其相位随 z' 减少而连续滞后;
- (3) 传输线上各点的输入阻抗等于传输线的特性阻抗。

2. 驻波状态(全反射状态)

当 $Z_L = 0$ (传输线终端短路)、 $Z_L = \infty$ (传输线终端开路) 或 $Z_L = \pm iX_L$ (传输线终端负载为纯电抗) 时, 都有 $|\rho(z')| = 1$, 此时入射波与反射波叠加形成驻波, 传输线工作在驻波状态, 下

面分别进行讨论。

(1) 传输线终端短路

传输线终端短路时, $Z_L = 0$, 由式(10.108)可得 $\rho_2 = -1$, 故

$$U_2^- = \rho_2 U_2^+ = -U_2^+ = |U_2^+| e^{i(\varphi_2 + \pi)}$$

此时电压和电流分别为

$$U(z') = U_2^+ e^{i\beta z'} + U_2^- e^{-i\beta z'} = U_2^+ (e^{i\beta z'} - e^{-i\beta z'}) = i2|U_2^+| e^{i(\varphi_2 + \pi)} \sin(\beta z') \quad (10.120)$$

$$I(z') = \frac{2|U_2^+| e^{i(\varphi_2 + \pi)}}{Z_0} \cos(\beta z') \quad (10.121)$$

将其表示为瞬时形式, 有

$$u(z', t) = \text{Re}[U(z') e^{i\omega t}] = 2|U_2^+| \sin(\beta z') \cos\left(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.122)$$

$$i(z', t) = \text{Re}[I(z') e^{i\omega t}] = \frac{2|U_2^+|}{Z_0} \cos(\beta z') \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (10.123)$$

所以, 输入阻抗为

$$Z_{in}(z') = iZ_0 \tan(\beta z') \quad (10.124)$$

它是一个纯电抗, 随 z' 值不同, 传输线可以等效为一个电容, 或一个电感, 或一个谐振电路。图 10.4 呈现了驻波状态下传输线终端短路情况下的电压、电流沿传输线分布的瞬时曲线、振幅分布曲线和阻抗分布 ($\varphi_2 = 0$)。

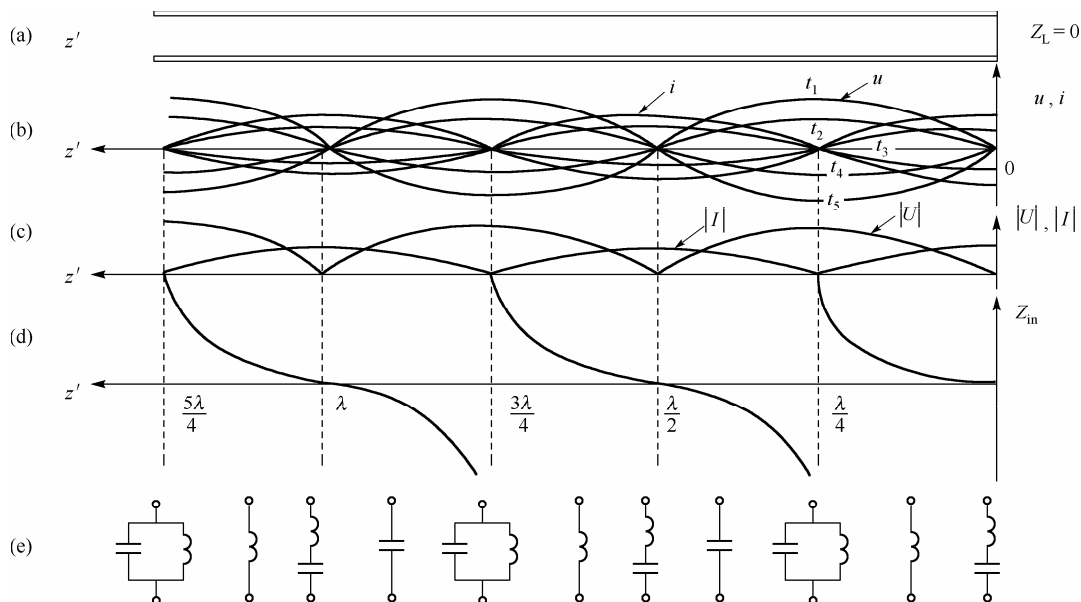


图 10.4 传输线终端短路情况下的电压、电流和阻抗分布图

由图10.4可知, 瞬时电压或电流在某个固定位置上随时间 t 作正弦或余弦变化。而在某一个时刻 t 时随距离 z 作余弦或正弦变化, 即瞬时电压和电流的时间相位差和空间相位差均为

$\pi/2$ ，这表明传输线上没有功率的传输。在离终端距离 $Z' = \lambda/4$ 的奇数倍处，电压振幅值总是最大，电流振幅值总为零，称其为电压的波腹点和电流的波节点。而在 $Z' = \lambda/2$ 的整数倍处，电压为波节点，而电流为波腹点。

终端短路的传输线上的阻抗为纯电抗，沿线阻抗分布如图 10.4(d) 所示。由图可见，在 $Z' = \lambda/4$ 的奇数倍处(即电压腹点)阻抗 $Z = \infty$ ，可等效为并联谐振回路。在 $Z' = \lambda/2$ 的整数倍(即电压节点)处，阻抗 $Z = 0$ ，可等效为串联谐振回路。在 $0 < Z' < \lambda/4$ 范围内，阻抗 $Z = +iX_L$ 为感性电抗，故可以等效为电感。在 $\lambda/4 < Z' < \lambda/2$ 范围内，阻抗 $Z = -iX_L$ 为容性电抗，故可以等效为电容。每隔 $\lambda/2$ 阻抗特性重复一次，每隔 $\lambda/4$ 阻抗性质变化一次，沿线各区域相应的等效电路如图 10.4(e) 所示。

(2) 传输线终端开路

传输线终端开路时 $Z_L = \infty$ ，由式(10.108)可得 $\rho_2 = 1$ ，故

$$U_2^- = \rho_2 U_2^+ = U_2^+ = |U_2^+| e^{i\varphi_2}$$

则电压和电流分别为

$$U(z') = U_2^+ e^{i\beta z'} + U_2^- e^{-i\beta z'} = U_2^+ (e^{i\beta z'} + e^{-i\beta z'}) = 2|U_2^+| \cos(\beta z') \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (10.125)$$

$$I(z') = \frac{2i|U_2^+| e^{i\varphi_2}}{Z_0} \sin(\beta z') \quad (10.126)$$

将其表示为瞬时形式，有

$$u(z', t) = \text{Re}[U(z') e^{i\omega t}] = 2|U_2^+| \cos(\beta z') \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (10.127)$$

$$i(z', t) = \text{Re}[I(z') e^{i\omega t}] = \frac{2|U_2^+|}{Z_0} \sin(\beta z') \cos\left(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.128)$$

则输入阻抗为

$$Z_{in}(z') = -iZ_0 \cot(\beta z') \quad (10.129)$$

与传输线终端短路情况一样，它也是一个纯电抗，随 z' 值不同，传输线可以等效为一个电容，或一个电感，或一个谐振电路。图 10.5 呈现了驻波状态下传输线终端开路情况下的电压、电流沿传输线分布的瞬时曲线、振幅分布曲线和阻抗分布 ($\varphi_2 = 0$)。

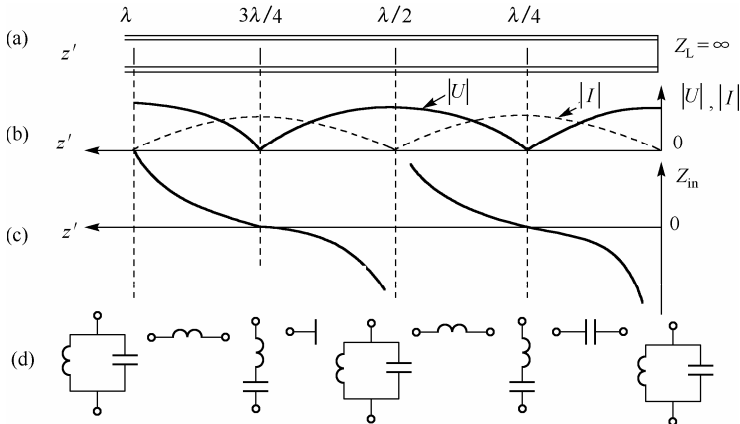


图 10.5 终端开路情况下的电压、电流和阻抗分布图

由图 10.5 可知, 终端为电压波腹点、电流波节点, 阻抗为无穷大。和终端短路的情况相比, 可以得到这样一个结论: 只要将终端短路的传输线上电压、电流及阻抗分布从终端开始去掉 $\lambda/4$ 线长, 余下线上的分布即为终端开路的传输线上沿线电压、电流及阻抗分布。

(3) 传输线终端负载为纯电抗

当传输线终端负载为纯电抗时, 由式 (10.108) 可得 $|\rho_2|=1$, 入射电压波和电流波被终端全反射, 使得传输线上处处有 $|\rho(z')|=1$ 。因为传输线终端为开路或短路的输入阻抗均为纯电抗, 其数值在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 之间变化, 所以纯电抗性负载可以用一定长度的短路线或开路线来代替, 因此可以把传输线终端 $Z_L = \pm iX_L$ 的纯电抗负载换成输入阻抗 $Z_{in}(l) = \pm iX_L$ 的一段长度为 l 的短路线, 这并不改变原传输线上电压、电流的振幅分布和阻抗分布, 只需要将传输线短路时的电压、电流及阻抗分布曲线图的坐标原点向源的方向移动一段距离 l_0 , 就可得到传输线终端接纯电抗负载的电压、电流及阻抗分布, 如图 10.6 所示。

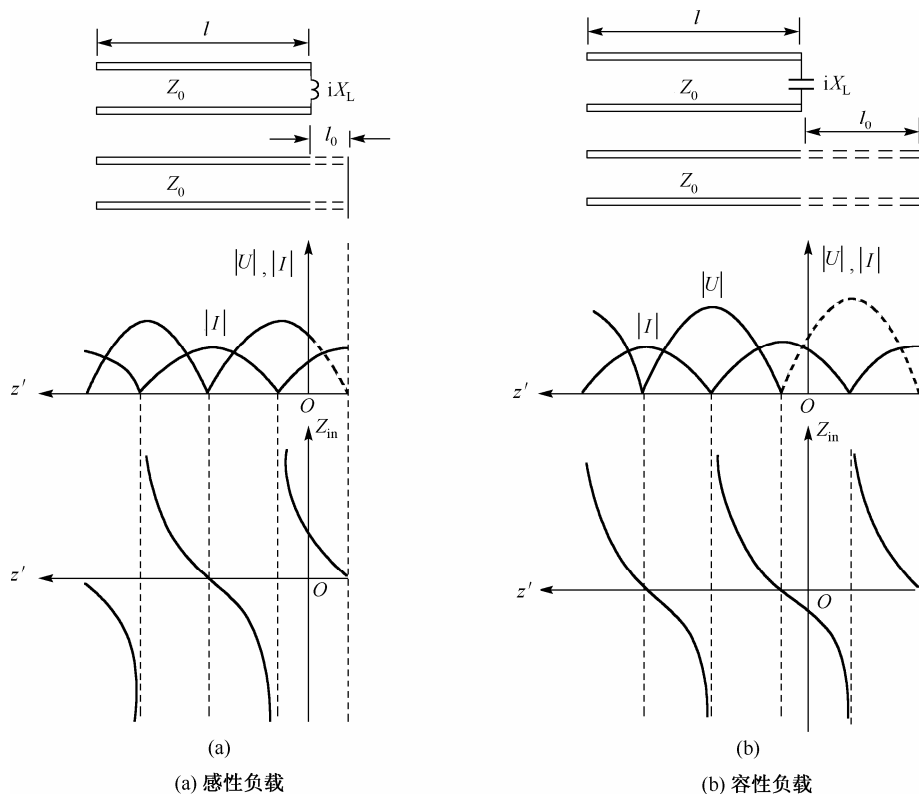


图 10.6 终端接纯电抗负载时沿线电压、电流及阻抗的分布

① 负载为纯感抗 ($X_L > 0$)

此感抗可用一段特性阻抗为 Z_0 、长度为 l_0 ($l_0 < \lambda/4$) 的短路线等效, 如图 10.6(a) 中的虚线所示。长度 l_0 可由下式确定:

$$X_L = Z_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} l_0 \Rightarrow l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{X_L}{Z_0} \quad (10.130)$$

② 负载为纯容抗 ($X_L < 0$)

此容抗可用一段特性阻抗为 Z_0 、长度为 l_0 ($\lambda/4 < l_0 < \lambda/2$) 的短路线等效, 如图 10.6(b) 中的虚线所示。长度 l_0 可由下式确定:

$$l_0 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{|X_L|}{Z_0} \quad (10.131)$$

纯驻波状态下的传输线不能用于传输能量, 但其输入阻抗的纯电抗性, 特别是长度为 $\lambda/4$ 的短路线的输入阻抗为无穷大(相当于开路), 长度为 $\lambda/4$ 的开路线的输入阻抗为零(相当于短路), 这两种特殊的传输线特性在微波技术中有着广泛的应用。

长度小于 $\lambda/4$ 的短路线的输入阻抗为感抗, 相当于一个电感。而长度小于 $\lambda/4$ 的开路线的输入阻抗为容抗, 相当于一个电容, 在微波技术中常用这种短路线或开路线构成电感或电容。

综上所述, 无耗传输线终端短路、终端开路或接纯电抗负载时, 线上将会产生全反射而形成驻波。驻波具有下列特性: 沿线电压、电流的振幅随位置而变化, 但在某些位置上永远是电压的波腹点(或电流的波节点), 且波腹点电压值为两倍的入射波电压。在与电压波腹点相差 $\lambda/4$ 处永远是电压波节点(或电流波腹点), 且波节点振幅值为零, 沿线的电压和电流在时间和距离位置上均相差 $\pi/2$, 因此线上没有能量的传输。沿线的阻抗分布除电压波腹点为无限大和波节点为零以外, 其余各处均为纯电抗。两波节点之间沿线的电压(或电流)相位相同, 在波节点的两侧沿线的电压(或电流)相位相反。

3. 混合状态(部分反射)

当传输线终端接有复阻抗 $Z_L = R_L \pm iX_L$, 即负载阻抗不等于传输线的特性阻抗, 也不是短路、开路或接纯电抗性负载, 而是任意阻抗时, 传输线上将同时存在入射波和反射波, 这时传输线工作在混合状态(也称为行驻波状态)。此时传输线上的电压和电流表达式分别为

$$\begin{aligned} U(z') &= U_2^+ e^{i\beta z'} + U_2^- e^{-i\beta z'} = U_2^+ e^{i\beta z'} + \rho_2 U_2^+ e^{-i\beta z'} \\ &= U_2^+ e^{i\beta z'} + 2\rho_2 U_2^+ \frac{e^{i\beta z'} + e^{-i\beta z'}}{2} - \rho_2 U_2^+ e^{i\beta z'} \\ &= U_2^+ e^{i\beta z'} (1 - \rho_2) + 2\rho_2 U_2^+ \cos(\beta z') \end{aligned} \quad (10.132)$$

$$I(z') = I_2^+ e^{i\beta z'} + I_2^- e^{-i\beta z'} = I_2^+ e^{i\beta z'} (1 - \rho_2) + i2\rho_2 I_2^+ \sin(\beta z') \quad (10.133)$$

由此可看出, 传输线上的电压、电流都由两项构成, 前一项为行波分量, 后一项为驻波分量。为了定量描述传输线上的行波分量和驻波分量, 采用第 9 章定义过的驻波系数 S_w 和行波系数 K_w 。

根据定义已知, 驻波系数 S_w 表示为

$$S_w = |U|_{\max} / |U|_{\min} = |I|_{\max} / |I|_{\min} \quad (10.134)$$

驻波系数和反射系数的关系为

$$S_w = \frac{1 + |\rho_2|}{1 - |\rho_2|} \quad (10.135)$$

由式(10.135)可知, 当传输线工作在行波状态时, $|\rho_2| = 0$ (无反射), 则 $S_w = 1$; 当传输线工作在驻波状态时, $|\rho_2| = 1$ (全反射), 则 $S_w = \infty$; 当传输线工作在混合状态时, $|\rho_2| < 1$ (部分反射), 则 $1 < S_w < \infty$ 。

根据定义已知, 行波系数 K_w 表示为

$$K_w = |U|_{\min} / |U|_{\max} = |I|_{\min} / |I|_{\max} \quad (10.136)$$

显然,

$$K_w = \frac{1}{S_w} = \frac{1 - |\rho_2|}{1 + |\rho_2|} \quad (10.137)$$

最后简单讨论一下阻抗匹配概念。根据上面分析可知, 使传输线处于行波工作状态时有如下好处:

- (1) 负载可吸收传输线传来的全部功率;
- (2) 传输线的功率容量大, 传输效率高;
- (3) 负载对波源无影响, 波源工作比较稳定。

但实际的微波系统中传输线并不总是工作在行波状态下的, 即传输线与负载常常是不匹配的, 因此讨论传输线的**阻抗匹配**是传输线理论中的重要内容。在由信号源、传输线及负载组成的微波系统中, 如果传输线与负载不匹配, 传输线上将形成驻波, 这样会使传输线功率容量降低, 同时还会增加传输线的衰减, 也会影响信号源的频率和输出功率的稳定性, 使得信号源不能输出最大功率, 负载也得不到全部的入射功率。

要使传输线与负载达到匹配, 通常是在负载与传输线之间引入阻抗匹配器, 只要阻抗匹配器和负载各自产生的反射波等幅反相, 就能相互抵消, 则阻抗匹配器与微波源之间的传输线就会处于无反射的行波工作状态, 这就是负载阻抗匹配的物理实质。匹配一般有两种: 一种是阻抗匹配, 使传输线两端所接的阻抗等于传输线的特性阻抗, 使传输线工作在行波状态; 另一种是共轭匹配, 使信号源输出最大功率。

例10.1 特性阻抗为 50Ω 的传输线, 终端负载为 $Z_L = 100 \Omega$, 求传输线上的驻波系数 S_w 及 $z' = \lambda/8$ 、 $\lambda/4$ 、 $3\lambda/8$ 、 $\lambda/2$ 处的输入阻抗。

解: 传输线终端的电压反射系数为

$$\rho_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$$

驻波系数为

$$S_w = \frac{1 + |\rho_2|}{1 - |\rho_2|} = 2$$

输入阻抗为

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + iZ_L \tan \beta z'}$$

$$\text{当 } z' = \lambda/8 \text{ 时, } \beta z' = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{1}{8} \lambda = \frac{1}{4} \pi,$$

$$Z_{in}\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 50 \frac{100 + i50 \tan(\pi/4)}{50 + i100 \tan(\pi/4)} = 50e^{-i36.9^\circ} = 40 - i30 (\Omega)$$

$$\text{当 } z' = \lambda/4 \text{ 时, } \beta z' = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$Z_{in}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 50 \frac{100 + i50 \tan(\pi/2)}{50 + i100 \tan(\pi/2)} = \frac{50^2}{100} = 25 (\Omega)$$

$$\text{当 } z' = \lambda/2 \text{ 时, } \beta z' = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2} = \pi,$$

$$Z_{\text{in}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 50 \frac{100 + i50 \tan \pi}{50 + i100 \tan \pi} = 100 \ (\Omega)$$

$$\text{当 } z' = 3\lambda/8 \text{ 时, } \beta z' = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3}{8} \lambda = \frac{3}{4} \pi,$$

$$Z_{\text{in}}\left(\frac{3}{8}\lambda\right) = 50 \frac{100 + i50 \tan(3\pi/4)}{50 + i100 \tan(3\pi/4)} = 50 \frac{2-i}{1-2i} = 50e^{i36.9^\circ} = 40 + i30 \ (\Omega)$$

例 10.2 特性阻抗为 $Z_0 = 75 \Omega$ 的传输线，终端接 $Y_L = \frac{1}{75} - i\frac{1}{75}$ (S) 的负载，为使在某频率点传输线上无反射波，即达到匹配，在负载上并联一段特性阻抗为 75Ω 的短路线，求短路线的长度。

解：如果短路支节线的输入导纳为

$$Y_{\text{in}}(z') = \frac{1}{Z_{\text{in}}} = +i\frac{1}{75}$$

即

$$Z_{\text{in}}(z') = -i75 \ (\Omega)$$

与负载并联后总负载导纳为

$$Y'_L = \frac{1}{75} - i\frac{1}{75} \left(+i\frac{1}{75} \right) = \frac{1}{75}$$

该负载可与主传输线匹配。由式 (10.124) 可得

$$Z_{\text{in}}(z') = -i75 = iZ_0 \tan(\beta z') = i75 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} z'\right)$$

$$\text{当 } z' = 3\lambda_2/8 \text{ 时, } \beta z' = \frac{2\pi}{\lambda_2} \times \frac{3}{8} \lambda_2 = \frac{3}{4} \pi,$$

$$Z_{\text{in}}(z') = -i75 \ (\Omega)$$

即 $z' = 3\lambda_2/8$ 时传输线上无反射波，其中 $\lambda_2 = \frac{v_{p2}}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$ ， μ_r 和 ϵ_r 为该段传输线中的相对介质参数。

10.3 矩形波导

在微波波段，为了减少传播损耗并防止电磁波向外泄漏，采用空心的金属管作为传输电磁波能量的导波装置。由于矩形波导具有结构简单、机械强度大的优点，而且它没有内导体，因此导体损耗低，而功率容量大。在目前大中功率的微波设备中，经常采用矩形波导作为传输线并构成微波元件。空心金属管能传播电磁波是 1933 年发现的，实际应用的主要是矩形横截面的矩形金属波导管和圆形截面的圆形金属波导管，本节只讨论矩形波导。由于空心金属波导管中只存在 TE 波和 TM 波，所以将求出矩形波导中导行波的具体表达式。

下面分别讨论矩形波导中的 TM 波和 TE 波。

10.3.1 矩形波导中的TM波

设矩形波导中,波导宽边内尺寸为 a ,窄边内尺寸为 b ,波导内壁为理想导体,波导内充满了均匀、线性、各向同性的理想媒质。如图10.7所示,采用笛卡儿坐标系,根据10.2节的

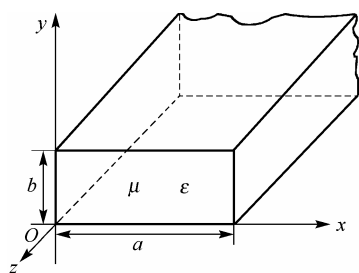


图 10.7 矩形波导

分析,对于 TM 波,有 $H_z=0$ 和 $E_z \neq 0$,所以主要的问题是求出 E_z ,得到 E_z 就可以根据式(10.24)~式(10.27)求出其他分量。

对于图10.7所示的矩形波导, E_z 所满足的方程为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + h^2 E_z = 0 \quad (10.138)$$

要得到确定的解,就必须知道边界条件。由于矩形波导的4个面为理想导体,故其边界条件为

$$E_z(0, y) = 0 \quad (10.139)$$

$$E_z(a, y) = 0 \quad (10.140)$$

$$E_z(x, 0) = 0 \quad (10.141)$$

$$E_z(x, b) = 0 \quad (10.142)$$

利用第5章介绍的分离变量法可以求得

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.143)$$

式中, E_0 的大小由波的激励源决定。将式(10.143)分别代入式(10.24)~式(10.27),即得到矩形波导中 TM 波的场分量为

$$E_x = -i \frac{\beta}{h^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (10.144)$$

$$E_y = -i \frac{\beta}{h^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (10.145)$$

$$H_x = i \frac{\omega\epsilon}{h^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (10.146)$$

$$H_y = i \frac{\omega\epsilon}{h^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (10.147)$$

式中, $h^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ 。

上述式子表示了 TM 波的场分量沿 x 和 y 方向的变化规律。对于随时间和沿 z 轴方向的变化规律,可在场分量后乘上因子 $e^{i\omega t - \Gamma z}$ 来表示。

取不同的 m 和 n 值,将代表不同的 TM 波场结构形式用 TM_{mn} 来表示。对于 TM 波, m 和 n 不能均为零,否则会出现没有意义的零解。

10.3.2 矩形波导中的TE波

对于 TE 波，有 $E_z = 0$ 和 $H_z \neq 0$ 。与求解 TM 波的方法类似，可以求得矩形波导中 TE 波的场分量为

$$E_x = i \frac{\omega \mu}{h^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (10.148)$$

$$E_y = -i \frac{\omega \mu}{h^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (10.149)$$

$$H_x = i \frac{\beta}{h^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (10.150)$$

$$H_y = i \frac{\beta}{h^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (10.151)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (10.152)$$

式中, $h^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ 。

同 TM 波一样, 用 TE_{mn} 来表示矩形波导中 TE 波的不同模式, 但对于 TE 波, m 和 n 不能同时为零。

电磁波在均匀波导装置中传播时主要存在三种状态: 传播状态、截止状态和临界状态。根据临界状态条件 $\Gamma = 0$, 可以求出矩形波导中 TE 波、TM 波的截止频率和截止波长, 然后可进一步讨论相关的传播性质。

由上面计算结果可知, 矩形波导中的 TE 波和 TM 波具有相同的截止波数表达式:

$$h^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$$

因此 TE 波和 TM 波的截止波长 λ_c 与截止频率 f_c 也应具有相同的形式。另外, TE 波和 TM 波在矩形波导中的传播系数均为

$$\Gamma = \sqrt{h^2 - k^2} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (10.153)$$

由 $\Gamma = 0$ 就可以求出截止波长和截止频率, 即

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \quad (10.154)$$

相应的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}} \quad (10.155)$$

可见, 截止波长与波导横截面尺寸 a 、 b 及模阶数 m 、 n 有关, 而截止频率则与波导截面尺寸、模阶数及媒质的电磁参数有关。

Γ 为虚数时, 波的传播才成为可能, 所以由 $\Gamma = i\beta$ 及 $\Gamma^2 = h^2 - k^2$, 可得相位常数为

$$\beta = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]} = k \sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad (10.156)$$

波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (10.157)$$

式中, $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 为电磁波在无界空间的波速。

波导中的波长为

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (10.158)$$

式中, λ 是电磁波在无界空间的波长。

由式(10.144)~式(10.147)和式(10.148)~式(10.152)可以看出, 每一对 m 、 n 将对应着波导中的一个模式, 每个模式在波导中都独立存在。因此, 满足矩形波导波动方程和边界条件的解有无穷多个, 包括无穷多个 TE_{mn} 模和无穷多个 TM_{mn} 模。另外在矩形波导中, 导行波的任何一个分量在横截面的 x 方向和 y 方向都呈驻波分布, 模阶数 m 和 n 分别表示导行波沿 x 方向和 y 方向的半驻波个数。

由式(10.154)和式(10.155)可以看出, 同一矩形波导中 m 、 n 相同的 TE_{mn} 波和 TE_{mn} 波具有相同的截止波长和截止频率, 这种现象称为**简并现象**。具有相同截止波长和截止频率的 TE_{mn} 波和 TE_{mn} 波的总数称为**简并度**, 矩形波导中的模式一般具有 TE_{mn} 模式和 TE_{mn} 模式的二重简并。

当波导尺寸一定时, 不同的 m 、 n 所对应的截止波长(或截止频率)也不同。波导中具有最长截止波长(或最低的截止频率)的模式称为最低次模, 其他的模式则称为高次模。如果 $a > b$, 矩形波导中的最低次 TE 模是 TE_{10} 模, 最低次 TM 模是 TM_{11} 模。又从式(10.155)可知 $(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}} > (\lambda_c)_{\text{TM}_{11}}$, 故 TE_{10} 模是矩形波导中所有模式中的最低次模, 称为矩形波导的**主模**。

矩形波导中 TE_{mn} 波和 TE_{mn} 波的波阻抗分别为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\Gamma}{i\omega\epsilon} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta\sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (10.159)$$

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{i\omega\mu}{\Gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \quad (10.160)$$

式中, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 为媒质的本征阻抗。

从式(10.159)和式(10.160)可以看出, 当 $f = f_c$ 时, Z_{TM} 变为零, 而 Z_{TE} 变为无限大。当 $f > f_c$ 时, Z_{TM} 和 Z_{TE} 均为实数; 当 $f < f_c$ 时, Z_{TM} 和 Z_{TE} 均为虚数, 此时电磁波只有衰减没有传播。由于阻抗为虚数时呈纯电抗性, 故这种衰减与欧姆损耗引起的衰减不同, 这是一种电抗衰减, 能量没有损失, 而是在波源与波导之间来回反射。

10.3.3 矩形波导中的 TE_{10} 波

在实际应用中, 为了解决波导的激励耦合及其他一些实际问题, 需要了解波导中电场和磁场的分布情况, 即所谓的**场结构**。为了能直观地了解波导的场结构, 可以利用电力线和磁力线来描述。

TE_{10} 波是矩形波导中的主波, 它具有最宽的单模工作频带, 因此 TE_{10} 模是工程中常采用的矩形波导**工作模式**, 下面主要来讨论 TE_{10} 波。

将 $m=1$ 、 $n=0$ 分别代入式(10.148)~式(10.152)即可得到 TE_{10} 波的场量表达式为

$$E_y = -i\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (10.161)$$

$$H_x = i\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (10.162)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (10.163)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0 \quad (10.164)$$

$$\text{式中,} \quad \beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - (\pi/a)^2} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} \quad (10.165)$$

图10.8给出了矩形波导中 TE_{10} 波的场量分布图。

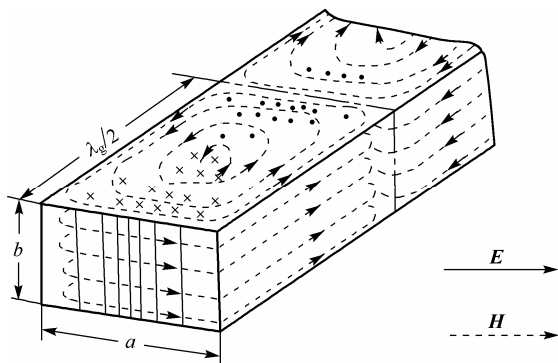


图 10.8 TE_{10} 波的场量分布图

由图10.8可见, TE_{10} 波的电力线是从一宽壁到另一宽壁的直线。而磁力线则是在 xOy 面的闭合曲线, 电力线与磁力线是交链的。了解矩形波导中的场分布, 不仅可以深入理解 TE_{10} 波, 在工程中也具有一定的实用意义。例如, 从 TE_{10} 波的电力线可以看出, 电场垂直于宽边, 且在宽边中央具有最大值, 在靠近窄边处为零。磁力线是平行于宽边的闭合线, 且在靠近窄边沿波导轴线方向的分量最大。了解了 TE_{10} 波在矩形波导中的这些结构特点, 在工程应用中若需要从矩形波导中耦合电磁能量时, 如果采用电耦合, 就可从波导宽壁中央插入平行于电场的小导线探针。如果采用磁耦合, 就可从窄壁上插入垂直于磁力线的小导线环。

当波导中有导行电磁波时, 将在金属波导管内壁感应出高频传导电流。实际的波导管内壁都是良导体, 由于电磁场在微波波段对良导体的穿透深度很小(数量级在 $1\mu\text{m}$ 左右), 因此可以认为管壁上的这种电流是面电流。另外, 在波导内壁空间中, 电场变化将产生位移电流, 这两种电流之和保证了全电流的连续性。在矩形波导壁上电荷与电流的分布情况如何呢? 在波导壁面上, 电荷 σ 由边界条件 $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ 给出, 即

$$\begin{aligned} \sigma|_{y=0} &= \mathbf{n} \cdot \varepsilon \mathbf{E}_y \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \left[-\mathbf{e}_y i\omega\mu\varepsilon \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] \\ &= -i\omega\mu\varepsilon \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{aligned} \quad (10.166)$$

$$\begin{aligned} \sigma|_{y=b} &= \mathbf{n} \cdot \varepsilon \mathbf{E}_y \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \left[-\mathbf{e}_y i\omega\mu\varepsilon \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] \\ &= i\omega\mu\varepsilon \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{aligned} \quad (10.167)$$

$$\sigma|_{x=0} = \sigma|_{x=a} = 0 \quad (10.168)$$

波导壁面上的面电流密度 \mathbf{J}_s 则由边界条件 $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 给出, 即

$$\mathbf{J}_S|_{x=0} = \mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_z H_z)|_{x=0} = -\mathbf{e}_y H_0 \quad (10.169)$$

$$\mathbf{J}_S|_{x=a} = -\mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_z H_z)|_{x=a} = -\mathbf{e}_y H_0 \quad (10.170)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_S|_{y=0} &= \mathbf{e}_y \times (\mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_z H_z)|_{y=0} \\ &= \mathbf{e}_x H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \mathbf{e}_z i\beta\left(\frac{a}{\pi}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{aligned} \quad (10.171)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_S|_{y=b} &= -\mathbf{e}_y \times (\mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_z H_z)|_{y=b} \\ &= -\mathbf{e}_x H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \mathbf{e}_z i\beta\left(\frac{a}{\pi}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{aligned} \quad (10.172)$$

图 10.9 表示了某时刻波导壁面上电流分布的情况。

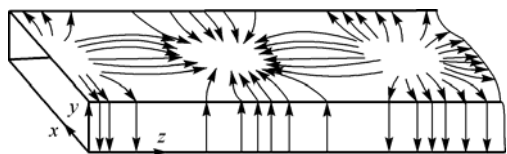


图 10.9 传播 TE_{10} 波时波导壁面上的电流分布

由图10.9可以看出,在窄壁上电流为横向。在宽壁的中央电流为纵向,在两边电流为横向。由全电流连续原理可知,在宽壁上传导电流中断的地方,一定有波导中的位移电流使全电流连续。研究波导管壁电流分布具有实际意义,例如,为了测量波导内的功率与传播特性等需要在波导壁上开缝或开孔,此时开缝必须

不破坏原来波导内的电磁场分布,因此缝必须顺着电流线开,并尽量窄。这种不切断高频电流的缝称为无辐射缝。但有时开缝是为了实现能量耦合,或使大量高频电磁能量从波导中辐射出来,或使外部电磁能量通过缝进入到波导中,因此这样的缝应该切断管壁电流,这种切断高频电流的缝称为强辐射缝,这种缝通常在垂直于电流线之处开。

下面以矩形波导要求传输 TE_{10} 波为例,来简单说明波导尺寸的选择问题。由式(10.155)可得 TE_{10} 波的截止波长为 $\lambda_c = 2a$, 要保证单模传输,必须满足 $\lambda < \lambda_c = 2a$, 即 $a > \lambda/2$ 。另一方面,必须抑制最靠近 TE_{10} 模的高次模,即 TE_{20} 模或 TE_{01} 模。 TE_{20} 模或 TE_{01} 模的截止波长分别为 a 和 $2b$ 。因此,要抑制 TE_{20} 模,必须要求 $\lambda > a$, 同时要抑制 TE_{01} 模,必须要求 $\lambda > 2b$, 由此可得横截面尺寸应满足

$$\lambda/2 < a < \lambda \quad (10.173)$$

$$0 < b < \lambda/2 \quad (10.174)$$

除了保证单模传输,还必须考虑损耗要小,保证一定功率容量及制造工艺要求。通常将矩形波导传输 TE_{10} 模的尺寸选取为

$$a = 0.7\lambda, \quad b = (0.4 \sim 0.5)a \quad (10.175)$$

波导的尺寸与波长的关系限制了波导系统适用的频率范围。当波长较大时,波导由于尺寸太大、太笨重而无法采用。当频率很高,波长较小时,波导尺寸较小,将使加工十分困难。所以,波导系统适用于厘米和毫米波段。工程上为了便于生产、安装和维修,波导的尺寸规格已标准系列化,不同频段使用的波导规格型号尺寸可由微波工程手册查得。

例 10.3 三种型号的矩形波导尺寸为

BJ-40	58.20 mm × 29.10 mm
BJ-100	22.86 mm × 10.16 mm

$$\text{BJ}-120 \quad 19.05 \text{ mm} \times 9.52 \text{ mm}$$

分别求其单模工作的频率范围。

解：单模传输时，波长与尺寸的关系为

$$a < \lambda < 2a$$

设可单模传输的波长范围为 $\lambda_1 \sim \lambda_2$ ，则

$$a < \lambda_1 \sim \lambda_2 < 2a$$

$$f_1 = c_1/\lambda_1 < c/a, \quad f_2 = c_1/\lambda_2 < c/2a$$

对于 BJ-40，将相应的波导尺寸代入上面公式，有

$$f_1 < c/a = 5.15 \text{ GHz}, \quad f_2 > c/2a = 2.57 \text{ GHz}$$

即单模传输的频率范围为 2.58 ~ 5.15 GHz。

同理，BJ-100 单模传输的频率范围为 6.562 ~ 13.12 GHz，BJ-120 单模传输的频率范围为 7.88 ~ 15.7 GHz。

例 10.4 设计使 $f = 3 \pm 0.3 \text{ GHz}$ 的电磁波进行单模传输的波导尺寸，并使 f 与截止频率之间至少还有 20% 的保护带。

解：已知 $f_1 = 3 - 0.3 = 2.7 \text{ GHz}$ ， $f_2 = 3 + 0.3 = 3.3 \text{ GHz}$

如留 20% 的保护带，设 TE₁₀ 波的截止频率为 f_{c1} ，TE₂₀ 波的截止频率为 f_{c2} ，则

$$f_1 \geq f_{c1}(1 + 0.2) = c/2a \times 1.2, \quad f_2 \leq f_{c2}(1 - 0.2) = c/a \times 0.8$$

由以上两式得

$$a \geq 0.6 \times c/f_1 = 0.067 \text{ m}, \quad a \leq 0.8 \times c/f_2 = 0.072 \text{ m}$$

$$f'_1 = f_1(1 - 0.2) = 2.16 \text{ GHz}, \quad f'_2 = f_2(1 + 0.2) = 3.96 \text{ GHz}$$

$$\lambda'_1 = c/f'_1 = 138.9 \text{ mm}, \quad \lambda'_2 = c/f'_2 = 75.75 \text{ mm}$$

并由

$$a < 75.75 \sim 138.9 \text{ mm} < 2a$$

得

$$a < 75.75 \text{ mm}, \quad a > 69.45 \text{ mm}$$

所以取

$$a = 70 \text{ mm}, \quad b = 0.2a = 14 \text{ mm}$$

例 10.5 在尺寸 $a = 22.86 \text{ mm}$ 、 $b = 10.16 \text{ mm}$ 的矩形波导中测得波导两相邻波节点距离为 $l = 22.5 \text{ mm}$ ，求波导中传输的电磁波的波长。

解：波导中波节点之间的距离是 $\lambda_g/2$ ，因此 $\lambda_g = 2l = 2 \times 22.5 = 45 \text{ mm}$ ，由 λ_g 与 λ 的关系式

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$$

得

$$\lambda = \lambda_g / \sqrt{1 + (\lambda_g/2a)^2} = 32 \text{ mm}$$

例10.6 空气填充的矩形波导尺寸为 $a = 22.86 \text{ mm}$ 、 $b = 10.16 \text{ mm}$ ， $f = 14 \text{ GHz}$ 的电磁波在该波导中存在哪几种模式(即有哪一种传播模式)? 当该波导中填充 $\varepsilon_r = 2$ 、 $\mu_r = 1$ 的理想介质后，该频率的电磁波又有哪几种模式存在?

解: 在空气填充时， $\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{14 \times 10^9} \text{ m} = 21.43 \text{ mm}$

而 $\lambda_{c, \text{TE}_{10}} = 2a = 45.72 \text{ mm}$ ， $\lambda_{c, \text{TE}_{20}} = a = 22.86 \text{ mm}$

$$\lambda_{c, \text{TE}_{01}} = 2b = 20.32 \text{ mm},$$

$$\lambda_{c\text{TM}_{11}}^{\text{TE}_{11}} = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}} = 18.56 \text{ mm}, \quad \lambda_{c, \text{TE}_{30}} = \frac{2}{3}a = 15.24 \text{ mm}$$

$$\lambda_{c, \text{TE}_{02}} = b = 10.16 \text{ mm}, \quad \lambda_{c\text{TM}_{21}}^{\text{TE}_{21}} = 15.19 \text{ mm}$$

用 λ_0 与以上各模式的 λ_c 相比较可见，空气填充时，波导中 TE_{10} 、 TE_{20} 模式是传播模式，即这两个模式是存在的。

在填充介质时，

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} f} = 15.16 \text{ mm}$$

用 λ 与各模式的 λ_c 相比较可知，在 $\varepsilon_r = 2$ 的介质填充时，有以下模式存在： TE_{10} 、 TE_{20} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 、 TM_{11} 、 TE_{30} 、 TE_{21} 和 TE_{21} 。

10.4 圆柱形波导

对于圆柱形波导，采用圆柱坐标系进行表示。设金属圆柱形波导是内半径为 a 的无限长圆柱形直波导，波导内壁是理想导体，波导内媒质是理想的，如图10.10所示。

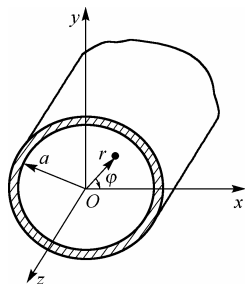


图 10.10 圆柱形波导

10.4.1 圆柱形波导中的TM波

先求 E_z 分量满足的方程。由于正弦电磁波 E_z 具有 $f(x, y)e^{-\Gamma z}$ 的表达形式，利用 $\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$ 和 $\nabla^2 = \nabla_t^2 + \partial^2/\partial z^2$ 可得

$$\nabla_t^2 E_z + (\Gamma^2 + k^2) E_z = \nabla_t^2 E_z + h^2 E_z = 0 \quad (10.176)$$

在圆柱坐标系中，

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (10.177)$$

故 E_z 分量满足的方程为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + h^2 E_z = 0 \quad (10.178)$$

式中， $h^2 = \Gamma^2 + k^2$ ， h 是圆柱形波导的本征值。

利用分量变量法求解式(10.178)，令

$$E_z = R(r)\Phi(\varphi) \quad (10.179)$$

经过简单计算可得

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + h^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \quad (10.180)$$

要使式(10.180)对一切的 r 和 φ 都成立, 等式两边应分别等于同一常数 m^2 , 即

$$-\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = m^2 \quad (10.181)$$

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + h^2 r^2 = m^2 \quad (10.182)$$

常微分方程式(10.181)的解为

$$\Phi(\varphi) = A \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.183)$$

式(10.182)可改写为

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(h^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (10.184)$$

这是柱贝塞尔 (Bessel) 方程, 它的通解为

$$R(r) = B_1 J_m(hr) + B_2 N_m(hr) \quad (10.185)$$

式中, $J_m(hr)$ 是 m 阶第一类柱贝塞尔函数; $N_m(hr)$ 是 m 阶第二类柱贝塞尔函数。图10.11 (a) 和 (b) 表示了前几阶第一类和第二类柱贝塞尔函数的变化曲线。

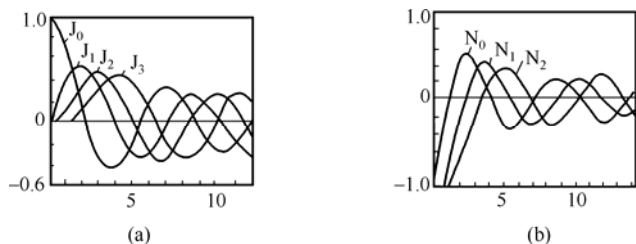


图 10.11 (a) 第一类柱贝塞尔函数 $J_m(hr)$ 和 (b) 第二类柱贝塞尔函数 $N_m(hr)$

由于波导中心处的场应该为有限值, 而当 $r \rightarrow 0$ 时, $N_m(hr) \rightarrow -\infty$, 故 B_2 必须为零。于是 E_z 可写为

$$E_z = R(r)\Phi(\varphi) = E_0 J_m(hr) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.186)$$

式中, $E_0 = AB_1$ 。将式(10.186)代入式(10.28)~式(10.31), 得到圆柱形波导中 TM_{mn} 波的场量

$$E_r = -i \left(\frac{\beta}{h} \right) E_0 J'_m(hr) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.187)$$

$$E_\varphi = i \left(\frac{m\beta}{h^2 r} \right) E_0 J_m(hr) \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ -\cos(m\varphi) \end{cases} \quad (10.188)$$

$$H_r = i \left(\frac{m\omega\epsilon}{h^2 r} \right) E_0 J_m(hr) \begin{cases} -\sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{cases} \quad (10.189)$$

$$H_\varphi = -i \left(\frac{\omega\epsilon}{h} \right) E_0 J'_m(hr) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.190)$$

式中, E_0 由激励源决定。根据边界条件, 在圆柱形波导的内壁 ($r=a$ 处), $E_z=0$ 。因此有

$$J_m(ha) = 0 \quad (10.191)$$

由此可求出圆柱形波导的本征值 h 。设 p_{mn} 为 m 阶柱贝塞尔函数的第 n 个根, 则有

$$h_{mn} = p_{mn}/a \quad (10.192)$$

表 10.2 给出了 p_{mn} 的前面几个值。

表 10.2 $J_m(\rho)=0$ 的根 p_{mn}

m	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931
1	3.832	7.016	10.173	13.324	16.471
2	5.136	8.417	11.620	14.796	17.960

这样可以求得圆柱形波导的基本参数:

$$\text{截止频率} \quad f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (10.193)$$

$$\text{截止波长} \quad \lambda_c = 2\pi/h \quad (10.194)$$

$$\text{传播系数} \quad \beta = \sqrt{k^2 - h^2} = k\sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad (10.195)$$

$$\text{相速} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (10.196)$$

$$\text{波导波长} \quad \lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (10.197)$$

10.4.2 圆柱形波导中的TE波

类似地, 可得到圆柱形波导中 TE 波的各场量表达式为

$$H_z = H_0 J_m(hr) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.198)$$

$$H_r = -i \left(\frac{\beta}{h} \right) H_0 J'_m(hr) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.199)$$

$$H_\varphi = i \left(\frac{m\beta}{h^2 r} \right) H_0 J_m(hr) \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ -\cos(m\varphi) \end{cases} \quad (10.200)$$

$$E_r = i \left(\frac{m\omega\mu}{h^2 r} \right) H_0 J_m(hr) \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ -\cos(m\varphi) \end{cases} \quad (10.201)$$

$$E_\varphi = i \left(\frac{\omega \mu}{h} \right) H_0 J'_m(hr) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (10.202)$$

式中, H_0 由激励源决定。根据边界条件, 当 $r=a$ 时, E_φ 应该为零, 所以有

$$J'_m(ha) = 0 \quad (10.203)$$

令 p'_{mn} 表示 m 阶柱贝塞尔函数的导数 $J'_m(ha)=0$ 的第 n 个根, 则有

$$h_{mn} = p'_{mn}/a \quad (10.204)$$

表 10.3 给出了 p'_{mn} 的前几个值。

表 10.3 $J'_m(p)=0$ 的根 p'_{mn}

m	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
0	3.832	7.016	10.174	13.324
1	1.841	5.332	8.536	11.706
2	3.054	6.705	9.965	13.170
3	4.201	8.015	11.344	

圆柱形波导中的最低阶模式 TM_{01} 波的最低截止频率为

$$f_c = \frac{h_{01}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{2.405}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (10.205)$$

TE_{01} 波的最低截止频率为

$$f_c = \frac{h_{01}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{3.832}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (10.206)$$

TE_{11} 波的最低截止频率为

$$f_c = \frac{h_{11}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1.841}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (10.207)$$

这三种模式是圆柱形波导常用的。由此可以看出, 在一定的圆柱半径下, TE_{11} 波具有最低截止频率, 因此, 对圆柱波导来说, TE_{11} 波是主波。

根据柱贝塞尔函数的性质, 由于

$$dJ_0(x)/dx = -J_1(x) \quad (10.208)$$

所以 TE 波的 p'_{0n} 应等于 TM 波的 p_{1n} , 即 $(\lambda_c)_{\text{TE}_{0n}} = (\lambda_c)_{\text{TM}_{1n}}$, 则 TE_{0n} 波和 TM_{1n} 波是简并的。

圆柱波导的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_r}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_r} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta\sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (10.209)$$

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_r}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_r} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta/\sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (10.210)$$

图10.12(a)、(b)和(c)分别给出了圆柱形波导中 TE_{01} 波、 TE_{11} 波和 TM_{01} 波的场分布, 其中实线为电力线, 虚线为磁力线。

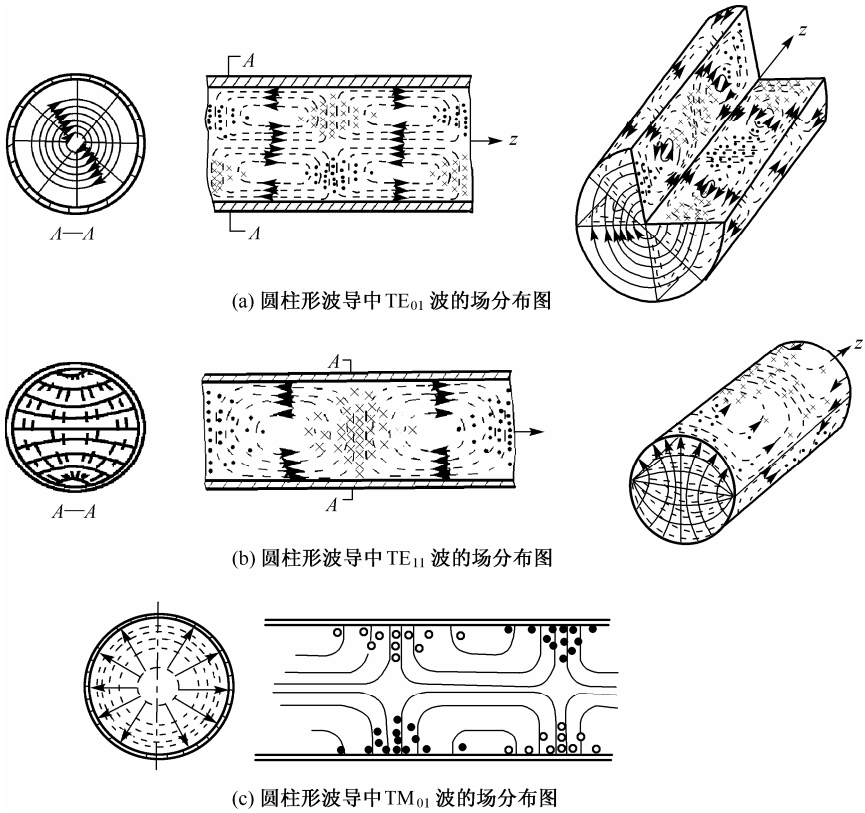


图 10.12 圆柱形波导中 TE_{01} 波、 TE_{11} 波和 TE_{01} 波的场分布图

10.5 导波系统中的功率传输与损耗

电磁波在波导中传播时必将伴有电磁能量的传输与损耗，讨论波导中的能量传输和损耗具有重要的实际意义。

10.5.1 波导的功率传输和功率容量

当终端负载与波导相匹配，或波导为无限长时，波导中传输的功率可以由波导横截面上坡印廷矢量的积分求得：

$$P = \frac{1}{2} \left[\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{z} dS \right] = \frac{1}{2|Z|} \int_S |\mathbf{E}_t|^2 dS = \frac{|Z|}{2} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS \tag{10.211}$$

式中， \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 分别为波导横截面内的电场强度和磁场强度； Z 为波阻抗。在矩形波导中，传输的功率为

$$P = \frac{1}{2Z} \int_0^a \int_0^b (|E_x|^2 + |E_y|^2) dx dy \tag{10.212}$$

在圆柱形波导中，传输的功率为

$$P = \frac{1}{2Z} \int_0^\pi \int_0^a (|E_r|^2 + |E_\phi|^2) r dr d\phi \tag{10.213}$$

下面我们来计算矩形波导中 TE_{10} 波的传输功率。由于其横向场分量只有 E_y 分量，所以由式(10.161)～式(10.164)可得

$$|E_y| = \omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (10.214)$$

$$\text{式中,} \quad E_0 = \omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \quad (10.215)$$

将式(10.214)代入式(10.212)，并以 $Z_{\text{TE}_{10}}$ 代替 Z ，得

$$P = \frac{1}{2Z_{\text{TE}_{10}}} \int_0^a \int_0^b E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx dy = \frac{ab}{4\eta} E_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (10.216)$$

式中， $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为无限介质的波阻抗。设 E_{br} 为波导中填充介质的击穿电场强度，即介质所能承受的最大电场强度，将式(10.216)中的 E_0 用 E_{br} 代替，则矩形波导中 TE_{10} 波的传输功率的极限功率 P_{tr} (即功率容量) 为

$$P_{\text{br}} = \frac{ab}{4\eta} E_{\text{br}}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (10.217)$$

矩形波导的功率容量与波长的关系如图10.13所示。

在实际应用中，由于波导内可能存在反射波和局部电场不均匀等问题，并且波导内表面不干净、有毛刺或不均匀等，所以要保证波导能安全地工作，通常取容许功率为

$$P = (1/5 \sim 1/3) P_{\text{br}} \quad (10.218)$$

10.5.2 波导的损耗和衰减

在考虑损耗的波导中，由于电磁波的传播常数是复数，即 $\Gamma = \alpha + i\beta$ ，所以此时电磁波的场矢量为

$$E(x, y, z) = [E'(x, y)e^{-\alpha z}]e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (10.219)$$

$$H(x, y, z) = [H'(x, y)e^{-\alpha z}]e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (10.220)$$

式中， $E'(x, y)e^{-\alpha z}$ 和 $H'(x, y)e^{-\alpha z}$ 是场矢量的振幅。显然，电磁波每传输一个单位距离，场矢量的振幅将是原来的 $e^{-\alpha}$ 倍，而电磁波所携带的功率则是原来的 $e^{-2\alpha}$ 倍。设在 z 处通过波导横截面的功率为 P ，则传输一个单位距离所损耗的功率 P_1 为

$$P_1 = P(1 - e^{-2\alpha}) \quad (10.221)$$

在一般情况下，波导中任意横截面处的传输功率 P 总是远大于该处单位长度波导中损耗的功率 P_1 ，即 $P \gg P_1$ ，这说明衰减常数 $\alpha \ll 1$ 。在此种情况下，将 $e^{-2\alpha}$ 展成幂级数，并取前两项作为近似，则式(10.221)可简化为

$$P_1 \approx 2\alpha P \quad (10.222)$$

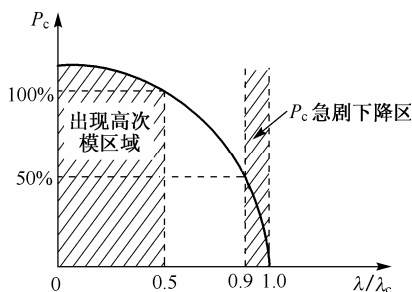


图 10.13 矩形波导功率容量与波长的关系

由此可得衰减系数为

$$\alpha = \frac{P_1}{2P} = \frac{\text{单位长度的损耗功率}}{2 \times \text{传输功率}} \quad (10.223)$$

对于空气填充的波导,其损耗是由波导壁有限电导率引起的。对于非理想介质填充的波导,不仅有波导壁引起的损耗,还有介质引起的损耗。

下面以矩形波导中传播的 TE_{10} 波为例来计算其衰减系数(不考虑介质引起的损耗),先计算波导传输功率和损耗功率。

由式(10.216)得矩形波导中 TE_{10} 波的传输功率为

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] = \frac{ab}{4\eta} E_0^2 \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} \quad (10.224)$$

式中, S 为波导的横截面。

损耗功率主要是波导壁面上表面电流在壁面流动时产生的,根据式(10.169)~式(10.172)可以得到波导各面的损耗功率,对于波导的 $y=b$ 面和 $y=0$ 面,有

$$\begin{aligned} P_{11} &= 2 \left[\int_0^a \frac{1}{2} |J_{sz}|^2 R_s dx + \int_0^a \frac{1}{2} |J_{sx}|^2 R_s dx \right] \\ &= \int_0^a |H_m|^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) R_s dx + \int_0^a H_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) R_s dx \\ &= \frac{aR_s}{2} (|H_m|^2 + H_0^2) \end{aligned} \quad (10.225)$$

式中, R_s 为表面电阻; $H_m = ik_z (a/\pi) H_0$ 。

同理,可得波导的 $x=a$ 面和 $x=0$ 面上的损耗功率为

$$P_{12} = 2 \int_0^b \frac{1}{2} |J_{sy}|^2 R_s dy = bR_s H_0^2 \quad (10.226)$$

故单位长度的总损耗功率为

$$P_1 = \left[\frac{a}{2} (|H_m|^2 + H_0^2) + bH_0^2 \right] R_s \quad (10.227)$$

将式(10.217)和式(10.227)代入式(10.223),得到

$$\alpha = \frac{R_s}{b\eta\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \quad (10.228)$$

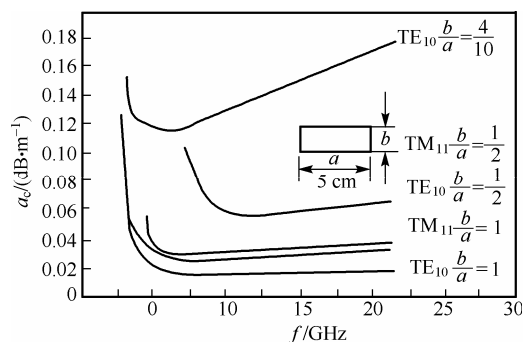


图10.14表示在一定宽度($a=5\text{ cm}$)的矩形波导中, TE_{10} 和 TM_{11} 两种模式在不同 b/a 比值下,由于波导壁不是理想导体而产生的损耗随频率变化的关系。由图可知,在截止频率附近,衰减突然增大。对于同一 b/a 比值, TE_{10} 波的衰减比 TM_{11} 波小,并且对于同一 b/a 比值, b/a 越大,衰减越小。

对于矩形波导中的其他模式及圆柱形波导,可以仿照上述方法求出。

图 10.14 矩形波导中 TE_{10} 波和 TM_{11} 波的衰减特性

10.6 谐 振 腔

谐振腔是工作在很高频率的谐振器件。在低频电路中,谐振电路是由集总参数电容和电感组成的回路。而在超高频以上频段,则采用与低频电路完全不同的分布参数谐振器——谐振腔。

为什么在超高频以上频段采用谐振腔作为谐振回路而不采用集总参数 LC 谐振回路呢?这是因为 LC 谐振回路在频率很高时有以下缺点:

- (1) 当波长与谐振回路的尺寸可以相比拟时,存在显著的辐射损耗;
- (2) 频率很高时,要求 LC 值很小,因而元件的体积很小,难以加工制作;
- (3) 集肤效应引起的导体损耗和介质损耗随频率的升高而急剧增大,使 LC 谐振回路的 Q 值显著降低;

- (4) 电感与电容的尺寸很小,容易击穿,因而不得不降低工作电压,从而降低了振荡功率。

由分布参数传输线制作的谐振腔没有辐射损耗,导体和介质损耗较小,因而具有较高的 Q 值。谐振腔是一个金属腔,有同轴腔、矩形腔,圆柱形腔等。谐振腔的制作方便,结构坚固。本节简要介绍同轴谐振腔与矩形谐振腔。

10.6.1 同轴谐振腔

图10.15所示为同轴谐振腔。设 TEM 波在同轴线中沿 z 方向传输,入射波电压和入射波电流分别为

$$U^i = U_0 e^{-i\beta z} \quad (10.229)$$

$$I^i = \frac{V_0}{Z} e^{-i\beta z} \quad (10.230)$$

式中, Z 为同轴线的特性阻抗。如果在 $z=0$ 处接短路导体板,则电磁波被反射,在同轴线上形成驻波。驻波电压和驻波电流分别为

$$U(z) = -i2U_0 \sin \beta z \quad (10.231)$$

$$I(z) = 2 \frac{U_0}{Z} \cos \beta z \quad (10.232)$$

这时,如果在 $z=-d$ 处再放一导体面,就形成长度为 d 的同轴谐振腔,当 $z=-d$ 处是电压波节点时,导体短路面的放入将不影响场分布,因为电压波节点处也是电场波节点,该处电场为零,有无导体并无影响。但如果 $z=-d$ 处不是电压波节点,放入导电板后将影响场分布,使 $-d < z < 0$ 区不能形成驻波。实际上,谐振腔是在电磁波能量被输入以前已加工完成的,电磁波通过腔壁上开孔或插入探针耦合进去,如果同轴谐振腔的长度 d 与波长满足关系

$$d = n\lambda/2 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (10.233)$$

那么在谐振腔中就可以产生驻波。由于 $\beta = 2\pi/\lambda$, 将其代入式(10.233), 得

$$\beta = n\pi/d \quad (10.234)$$

将式(10.234)分别代入式(10.231)和式(10.232), 得

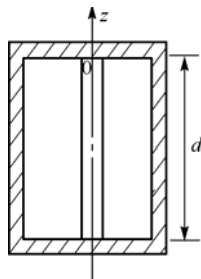


图 10.15 同轴谐振腔

$$U(z) = -i2U_0 \sin\left(\frac{n\pi}{d}z\right) \quad (10.235)$$

$$I(z) = 2\frac{U_0}{Z} \cos\left(\frac{n\pi}{d}z\right) \quad (10.236)$$

谐振腔中形成驻波后, 电场能量与磁场能量在腔中就不断交换。当电场能量达到最大时, 磁场能量为零; 当磁场能量达到最大时, 电场能量为零, 也就是说, 电磁波在腔中达到谐振。由于 $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, 代入式(10.234), 可得到谐振腔的谐振频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = n\frac{1}{2d\sqrt{\mu\epsilon}} = n\frac{v_p}{2d} \quad (10.237)$$

由式(10.237)可见, 当给定谐振腔长度与填充介质参数后, 谐振腔有无限多个谐振频率(n 取不同的值), 这一特点与 LC 谐振回路不同。改变谐振腔长度, 可以改变谐振频率。当 $n=1$ 时, 谐振腔的长度最短, 为 $\lambda/2$ 。为了使谐振腔更短, 可以使谐振腔一端短路, 另一端开路, 构成 $\lambda/4$ 谐振腔。除此之处, 还有电容加载同轴谐振腔。

10.6.2 矩形谐振腔

图10.16所示为矩形谐振腔, 是由一段宽度为 a 、高度为 b 、长度为 d 的矩形波导构成的。波导的一端在 $z=0$ 处短路。电磁波经短路而反射后形成驻波, 如果 $z=+d$ 处电场 E_x 与 E_y 为零(波节点), 那么在该处放置一个矩形短路板, 将不会破坏原来的场结构。这样便构成了一个矩形谐振腔。所以, 矩形谐振腔内的场结构可以用相应的波导内的场结构来求解。例如, 设入射波为 TE_{mn} 波, 其 E_y^i 为

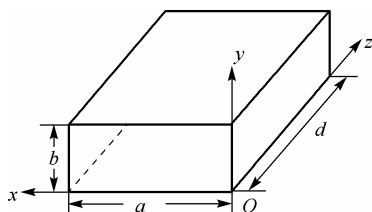


图 10.16 矩形谐振腔

$$E_y^i = -i\frac{\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_z z} \quad (10.238)$$

经 $z=0$ 处的短路面全反射后, 反射波的 E_y^r 为

$$E_y^r = i\frac{\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_z z} \quad (10.239)$$

式中取+号是考虑到 $E_y(z=0) = 0$ 。入射波与反射波叠加后, E_y 为

$$\begin{aligned} E_y &= i\frac{\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)(e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}) \\ &= -\frac{\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin k_z z \end{aligned} \quad (10.240)$$

在 $z=+d$ 处也有短路面, 必须使 $E_y(z=d) = 0$ 。由式(10.240)得

$$k_z d = l\pi \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (10.241)$$

即

$$k_z = l\pi/d \quad (10.242)$$

将其代入式(10.240), 得

$$E_y = -\frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (10.243)$$

类似地,可以得到其余场量。由式(10.243)可见,在谐振腔中波沿 x, y, z 三个方向都是驻波, m, n, l 不同场结构也就不同。对于给定的 m, n, l , 对应的场称为模 TE_{mnl} 。同理, 矩形谐振腔中也可存在 TM_{mnl} 模。

已知矩形波导中 TE_{mn} 或 TM_{mn} 的相位常数 k_z 的平方为

$$k_z^2 = k^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2$$

现在要求 $k_z = l\pi/d$, 将其代入上式, 得

$$k = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (l\pi/d)^2} \quad (10.244)$$

由于 $k = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$, 代入上式就可以得到 TE_{mnl} 或 TM_{mnl} 的谐振频率为

$$f_{mnl} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (l/d)^2} \quad (10.245)$$

式(10.245)表明: 谐振腔的谐振频率不仅与腔的尺寸有关, 还与工作模式有关。一个给定尺寸的谐振腔可以有多个模式, 也就是说, 可以有多个谐振频率。

谐振腔内电磁振荡的激励及将其能量耦合到外部电路, 都可以通过小的同轴探针、小环或小孔实现, 如图10.17所示。



图 10.17 谐振腔耦合

10.6.3 谐振腔的品质因素 Q

谐振腔中可以储存电磁能量。对于给定的模式, 可以由场的分布来计算腔中的电场及磁场能量密度, 对腔体积分就可以计算出谐振腔中的电磁场能量。谐振腔中也存在功率损耗, 对于给定的模式, 用类似于矩形波导中计算损耗的方法, 可以计算谐振腔导电壁的欧姆损耗。一般谐振腔中的介质损耗相对较小, 可以忽略。为了衡量谐振腔中损耗的大小, 定义固有品质因素 Q_0 为

$$Q_0 = \frac{2\pi \times \text{腔中总电磁能}}{\text{一个周期的损耗能量}} = \omega_0 \frac{W}{P_l} \quad (10.246)$$

式中, ω_0 为谐振角频率; W 为谐振腔中的总电磁能; P_l 为腔中的功率损耗。由于谐振腔的损耗较小, 因此 Q_0 值很大。例如, 使用 $a = b = d = 3 \text{ cm}$ 的铜 ($\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$) 制矩形腔, 当谐振于 TE_{101} 模时, Q_0 为 12 700。

例 10.7 用同轴线制作一谐振腔, 使其在 $f = 300 \text{ MHz}$ 频率上谐振, 求该谐振腔的长度。该腔还可在哪些频率上谐振?

解: $f = 300 \text{ MHz}$, $\lambda_0 = c/f = 1 \text{ m}$ 。用一段长为 $l = \lambda/2 = 0.5 \text{ m}$ 的空气介质同轴线两端短路构成的谐振腔, 就可以谐振于 300 MHz 。

该谐振腔还可谐振于

$$f_n = n \frac{c}{2d} = nf = 300n \text{ MHz}$$

例 10.8 矩形谐振腔腔内为空气, $a = b = d = 3 \text{ cm}$, 求其谐振模式为 TE_{101} 、 TE_{011} 和 TM_{111} 的谐振频率。

解: 因为 $f_{mnl} = \frac{c}{2} \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (l/d)^2}$, 所以

对于 TE_{101} 模	$f_{101} = 7.071 \text{ GHz}$
对于 TE_{011} 模	$f_{011} = 7.071 \text{ GHz}$
对于 TE_{111} 模	$f_{111} = 8.66 \text{ GHz}$

10.7 介质波导和光纤简介

10.7.1 介质波导

介质波导是全部用介质做成的棒, 截面形状有圆形、椭圆形、矩形, 或是这些基本结构的变形。介质波导的导波原理是利用全反射原理, 当具有高介电常数(折射率大)的介质棒(条、块)被具有较低介电常数(折射率小)的介质所包围时, 进入高介电常数的介质棒的电磁波就可以在两种介质交界面处产生全反射, 并形成沿介质棒轴线传播的波。如果电磁波频率较低, 则介质波导的辐射损耗较大。因此在实际应用中, 介质波导只适用于传播微波(包括毫米波和亚毫米波)和光波。在微波范围内使用的介质波导, 根据不同的要求可采用不同材料。与金属波导相比, 介质波导具有损耗小、加工制作方便和成本低的优点, 而且也便于与微波元器件、半导体器件等连成一体, 以构成具有各种功能的毫米波和亚毫米波的混合集成电路。

10.7.2 光纤

1. 光纤基本结构和参数

光纤的基本结构如图10.18所示, 由纤芯、包层和套层构成。纤芯由高度透明的介质材料(如石英玻璃等)经过严格的工艺制成, 是光波的传播媒质, 包层是一层折射率稍低于纤芯折射率的介质材料, 它一方面与纤芯一起构成光波导, 另一方面也保护纤壁不受污染或损坏。套层一般由高损耗的柔软材料(如塑料等)制成, 起着增强机械性能、保护光纤的作用, 同时也阻止纤芯光功率串入邻近光纤线路, 抑制串扰。

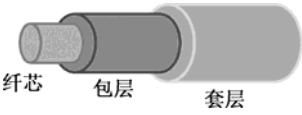


图 10.18 光纤结构简图

常见的光纤可分为两大类：一类是通信用光纤；另一类是非通信用光纤。前者主要用于各种光纤通信系统之中；后者则在光纤传感、光纤信号处理、光纤测量及各种常规光学系统中应用广泛。对于通信用光纤, 在系统工作波长处应满足低损耗、宽传输带宽(大容量)及与系统元器件(如光源、探测器和光无源器件)之间的高效率耦合等要求。同时, 也要求光纤具有良好的机械稳定性、低廉的成本和抗恶劣环境的性能。非通信用光纤通常要求具有特殊的性能, 例如高双折射、物理敏感性强及具有非线性等, 而在其他方面的要求则相应较低。

光纤的纤芯和包层是两种相对介电常数不同的材料, 纤芯的相对介电常数 ϵ_{r1} (折射率

$n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$) 大于包层的相对介电常数 ϵ_{r2} (折射率 $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$)。一般包层的折射率 n_2 是均匀分布的, 而纤芯的折射率 n_1 在纤芯横截面上的分布可以有两种情况: 一种是均匀分布, 且 $n_1 > n_2$, 在纤芯与包层的交界面折射率发生突变, 这样的光纤称为阶跃型光纤; 另一种是从纤芯中心开始, n_1 随着 r 的增大而逐渐地减小, 这种光纤称为渐变型(梯度型)光纤。 n_1 的分布规律, 一般可采用下面的近似式表示:

$$n_1(r) \approx n_1(0) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \Delta \right] \quad (10.247)$$

式中, $n_1(0)$ 是纤芯中心处的折射率; a 是纤芯的半径; α 是确定折射率分布规律的参数; Δ 称为相对折射率差,

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (10.248)$$

通信用光纤的 n_1 与 n_2 相差很小, 通常称这种光纤为弱导光纤。在这种情况下, 相对折射率可以近似地写为

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (10.249)$$

一般地, Δ 的值为 1%~3%。渐变型光纤与阶跃型光纤相比, 模式间的色散(简称模式色散)小, 频带宽。其原因是: 当光线在渐变型光纤中传输时, 偏离纤芯中心轴线越远, 其传播路径也越长, 但传播速度却随着折射率的减小而增大; 光线越靠近纤芯中心轴线时, 其传播路径也越短, 但传播速度却随着折射率的增大而减小。这样, 以不同角度从光纤始端的端面入射到纤芯中的光线, 就有可能几乎同时传输到光纤的终端, 减少了模式色散, 也增大了频带宽度。

2. 光纤的分析方法

分析光波在光纤中的传输特性有两种理论: 射线理论和波动理论。所谓射线理论, 就是利用几何光学理论来分析光在光波导中的传输特性, 几何光学理论是电磁波理论的短波极限。由于几何光学所得到的结果物理概念清楚, 易于理解, 所以在分析光波的传播特性时有着重要意义, 但由几何光学所得到的结果仅适用于分析对象的几何尺度远大于光波波长的情形, 因此有局限性。波动理论是利用麦克斯韦方程组, 把光纤当做波导, 考虑边界条件来求解光纤中电磁场的分布, 并分析光波在光纤中的传输特性。波动理论可以比较完整地解释光波在光纤中的传输特性。

3. 数值孔径

在光纤中可以用数值孔径来表示光纤的聚光能力。如图 10.19 所示, 设光波从与 z 轴成 θ_0 夹角的方向投射在光纤端面上, 可以看出, 当光束在波导外界面的入射角 θ_0 足够小时, 在纤芯和包层之间的分界面上才能产生全反射, 这时

$$n_0 \sin \theta_0 \leq n_1 \sin \theta_c \quad (10.250)$$

$n_0 \sin \theta_0$ 的最大值称为数值孔径 NA, 并且

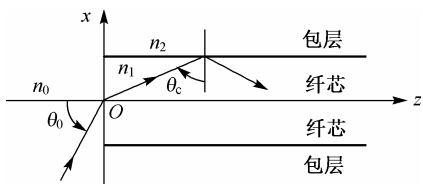


图 10.19 光纤中的全反射

$$NA \stackrel{\text{def}}{=} n_0 \sin \theta_{0\max} \quad (10.251)$$

一般情况下, $n_0=1$, 则

$$NA = \sin \theta_{0\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (10.252)$$

数值孔径越大, 光纤也越容易被激励。但数值孔径也不能太大, 否则会使光纤的色散增加, 带宽减小, 因此 NA 的范围一般为 0.15~0.24。

4. 光纤波导的主要优点

光纤波导具有如下主要优点:

(1) 通信容量极大。一对光纤波导, 理论上可以传输上百万路电话或几千套电视信号, 比目前容量最大的同轴电缆的容量大数百倍, 而且光纤波导能够多光束传输, 特别适宜于空间布线拥挤的大城市之间使用。

(2) 保密性好。在传输途中无泄漏, 极难被窃听; 抗干扰能力强, 不受任何电波干扰。

(3) 尺寸小, 质量轻, 柔软, 弯曲半径可小到几个厘米, 适于复杂地形或室内布线。

(4) 抗腐蚀, 耐高温, 传输特性极为稳定, 可在恶劣环境下使用。

目前, 光纤在大容量信息传输、通信、计算机、光电子仪器及光电技术中都有广泛应用。

本章小结

1. 导波系统分为 TEM 波系统与非 TEM 波系统。TEM 波导波系统也称为传输线, 在 TEM 波导波系统中可建立起静态场, 传输线可用电压波和电流波分析其传输特性。非 TEM 波导波系统可用纵向场法先求解纵向场, 然后由场方程求出其他横向场。

2. 传输线分析要考虑分布参数, 电压和电流分布满足电报方程。传输线的特性阻抗由分布参数决定, 低损耗传输线除要考虑电压和电流指数衰减外, 其他特性按无损耗线近似。传输线有行波、驻波和混和行驻波三种可能的工作状态, 由负载特性决定。

3. 当特性阻抗等于负载阻抗时, 传输线匹配, 无反射波, 否则有反射波。传输线特性阻抗与负载阻抗不等时, 可采用并联或/和串联一段传输线等方法进行匹配, 传输线终端短路或开路可等效为电容、电感或谐振回路。

4. 矩形波导和圆柱形波导中不能传输 TEM 波, 但可传输多个 TM 和 TE 模式, 每种模式的场分布及相速不同。当工作波长小于某模式的截止波长时, 该模式才为传播模。TE₁₀ 波是矩形波导的主波, TE₁₁ 波是圆柱形波导的主波。

5. 电磁波在波导中传输的相速大于它在自由空间传播的相速, 而群速则小于它在自由空间传播的相速, 波导是一种色散的导波装置。

6. 在导波系统中, 导体壁和填充介质均有功率损耗。波导中的衰减系数 $\alpha = P_1/2P$, 此处的 P 代表波导中传输的功率, P_1 代表每单位长度的损耗功率。

7. 谐振腔是频率很高时采用的振荡回路。谐振腔内有无限多个振荡模式, 每一模式对应于一个谐振频率。谐振腔的品质因素 $Q = \omega W/P_1$, 此处的 W 为谐振腔储存的能量, P_1 为损耗功率。

8. 光纤是引导光波传输的一种装置, 光纤传输具有许多优点。

习 题 10

10.1 长度为 $L = 1.5 \text{ m}$ 的无损耗传输线, 当其终端短路时, 测得输入阻抗为 $\mathrm{j}103 \Omega$, 当其终端开路时, 测得输入阻抗为 $-\mathrm{j}54.6 \Omega$ 。

- (1) 求传输线的特性阻抗 Z_0 和传输常数 Γ ;
- (2) 若工作频率不变, 线长增加 1 倍后短路的输入阻抗变为多少?
- (3) 为使输入端呈现开路, 短路线的长度应为多少?

10.2 平行双线传输线的线间距 $D = 8 \text{ cm}$, 导线的直径 $d = 1 \text{ cm}$, 周围是空气, 试计算:

- (1) 分布电感和分布电容;
- (2) $f = 600 \text{ MHz}$ 时的相位系数和特性阻抗 (设 $R_1 = 0$, $G_1 = 0$)。

10.3 在构造均匀传输线时, 用聚乙烯 ($\epsilon_r = 2.25$) 作为电介质, 假设不计损耗, 试求:

- (1) 对于 300Ω 的平行双线, 若导线的半径为 0.6 mm , 则线间距应选为多少?
- (2) 对于 75Ω 的同轴线, 若内导体的半径为 0.6 mm , 则外导体的内半径应选为多少?

10.4 考虑一根无损耗传输线, (1) 当负载阻抗 $Z_L = 40 - \mathrm{j}30 \Omega$ 时, 欲使线上驻波比最小, 则线的特性阻抗应为多少? (2) 求出该最小的驻波比及相应的电压反射系数; (3) 确定距负载最近的电压最小点位置。

10.5 有一段特性阻抗为 $Z_0 = 500 \Omega$ 的无损耗传输线, 当终端短路时, 测得始端的阻抗为 250Ω 的感抗, 求该传输线的最小长度。如果该线的终端为开路, 长度又为多少?

10.6 为什么一般矩形波导测量线的纵槽开在波导宽壁的中线上?

10.7 有一内充空气、截面尺寸为 $a \times b$ ($b < a < 2b$) 的矩形波导, 以主模工作在 3 GHz 。若要求工作频率至少高于主模截止频率的 20% 和至少低于次高模截止频率的 20%。(1) 给出尺寸 a 和 b 的设计; (2) 根据设计的尺寸, 计算在工作频率时的波导波长和波阻抗。

10.8 在尺寸为 $a \times b = 22.86 \text{ mm} \times 10.16 \text{ mm}$ 的矩形波导中, 传输 TE_{10} 波, 工作频率 30 GHz 。试求:

- (1) 截止波长 λ_c 、波导波长 λ_g 和波阻抗 $Z_{\text{TE}_{10}}$ 。
- (2) 若波导的宽边尺寸增大一倍, 上述参数如何变化? 还能传输什么模式?
- (3) 若波导的窄边尺寸增大一倍, 上述参数如何变化? 还能传输什么模式?

10.9 试推导在矩形波导中传输 TE_{mn} 波时的传输功率。

10.10 设计一个矩形谐振腔, 使其在 1 GHz 及 1.5 GHz 分别谐振于两个不同模式上。

10.11 由空气填充的矩形谐振腔, 其尺寸为 $a = 25 \text{ mm}$ 、 $b = 12.5 \text{ mm}$ 、 $d = 60 \text{ mm}$, 谐振于 TE_{102} 模式, 若在腔内填充介质, 则在同一工作频率将谐振于 TE_{103} 模式, 求介质的相对介电常数 ϵ_r 应为多少?

第 11 章 辐射系统简介

在第 4 章中我们定义了运动点电荷的标量位和矢量位，本章将运用这些位函数来研究按照正弦变化运动的电荷所产生的辐射场。研究从受到了正弦时变场作用的自由电荷的辐射开始着手，然后推广到束缚电荷的情况，这些结果将形成一般辐射系统(天线)的分析基础。

11.1 缓慢移动的加速点电荷的辐射

考虑一个在自由空间自由运动的点电荷 q ，该电荷受到了线性极化平面电磁波的作用，这样的波被描述为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - k_x x)] \quad (11.1)$$

式中， \mathbf{E}_0 是垂直于 x 轴的一个常数矢量； ω 和 k_x 为常数。在电磁场中自由电荷所受到的力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (11.2)$$

如果电荷的速度 $v \ll c$ ，那么磁力将比电力小得多，则 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 项可以忽略。若选择常数矢量 \mathbf{E}_0 指向 z 方向，则意味着电荷加速度也将朝着 z 的方向(见图 11.1)。电荷的运动被描述为

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = qE_0 \cos \omega t \quad (11.3)$$

式中， m 为电荷的质量。上述微分方程的稳态解为

$$z = -\frac{qE_0}{m\omega^2} \cos \omega t \quad (11.4)$$

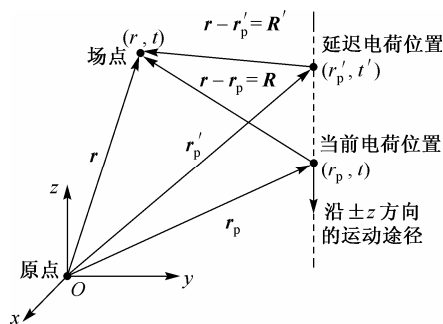


图 11.1 电荷在场中的运动

则电荷的速度为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{qE_0}{m\omega} \sin \omega t \quad (11.5)$$

为了获得延迟速度 $v(t')$ ，先写出 t 与 t' 的变换关系：

$$t' = t - R'/c \quad (11.6)$$

其中 R' 是从场点 (r, t) 到延迟电荷位置 (r'_p, t') 的距离，即

$$R' = |r - r'_p| \quad (11.7)$$

由此可得延迟速度为

$$\mathbf{v}(t') = \mathbf{e}_z \frac{qE_0}{m\omega} \sin[\omega(t - R'/c)] \quad (11.8)$$

李纳-维谢尔函数则为

$$A(r, t) = \mathbf{e}_z \frac{q^2 E_0 \sin[\omega(t - R'/c)]}{m\omega 4\pi \epsilon_0 c^2 R' [1 - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{n}'/c]} \quad (11.9)$$

前面已经取 $v \ll c$ ，这时可忽略磁力，则式(11.9)可写成

$$\mathbf{A}(r, t) = \mathbf{e}_z \frac{q^2 E_0 \sin[\omega(t - R'/c)]}{m\omega 4\pi\epsilon_0 c^2 R'} \quad (11.10)$$

如果我们所关心的场点远离源点，则相比较而言，场点到电荷位置的距离与场点到延迟位置的距离可近似相等，即有

$$R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| \approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p| = R \quad (11.11)$$

这个新的条件还需要进一步进行检验。假定从场点 (r, t) 到电荷点 (r_p, t) 的距离 R 比电荷延迟位置到当前位置的距离要大得多，由于电荷是按正弦曲线运动的，所以任何两个位置之间的最大距离 L 将是其变化幅值的两倍，这里所说的幅值由式(11.4)给出，即有 $L = 2qE_0/m\omega^2$ 。从式(11.5)可得

$$L = 2v_0/\omega$$

其中， v_0 是速度极大值。于是上面所说的条件可表示为

$$R \gg 2v_0/\omega$$

但由于已经假定了 $v \ll c$ ，如果 $R \gg 2c/\omega$ ，则上述条件一定满足。

因为光速 $c = \lambda\omega/2\pi$ (λ 为波长)，故上面的关系式又可以表示为

$$\begin{cases} R \gg \lambda \\ L \gg \lambda \end{cases} \quad (11.12)$$

式(11.12)表示了离电荷很远处的约束关系。在满足这种约束关系的情况下，可以将式(11.10)写成

$$\mathbf{A}(r, t) = \mathbf{e}_z \left(\frac{q^2 E_0}{m\omega} \right) \frac{\sin[\omega(t - R/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \quad (11.13)$$

其中， R 的矢量关系为

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p = (x - x_p)\mathbf{e}_x + (y - y_p)\mathbf{e}_y + (z - z_p)\mathbf{e}_z \quad (11.14)$$

$$R = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2} \quad (11.15)$$

对于运动的电荷，磁场 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \frac{\partial A}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial A}{\partial x} + \mathbf{e}_z (0) \quad (11.16)$$

为了求出 A 对于 x 和 y 的导数，先从式(11.13)中求出导数 $\partial A/\partial R$ ，再从式(11.15)中求出 $\partial R/\partial y$ 和 $\partial R/\partial x$ ，然后相乘即可得到 $\partial A/\partial y$ 和 $\partial A/\partial x$ 。

$$\frac{\partial A}{\partial R} = \frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 m\omega} \left\{ \frac{R(-\omega/c) \cos[\omega(t - R/c)] - \sin[\omega(t - R/c)]}{R^2} \right\}$$

由于 R 的最大值已受到约束, 所以上式中的正弦项可以忽略 ($R \ll \lambda$ 等效于 $R\omega/c \ll 1$), 即

$$\frac{\partial A}{\partial R} = \frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 m \omega} \left\{ \frac{(-\omega/c) \cos[\omega(t - R/c)]}{R} \right\} \quad (\text{当 } R \ll \lambda) \quad (11.17)$$

从式(11.15)可得

$$\partial R / \partial x = (x - x_p) / R \quad (11.18)$$

$$\partial R / \partial y = (y - y_p) / R \quad (11.19)$$

所以有

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \left(\frac{\partial A}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) = \left(-\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R^2} (y - y_p)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left(\frac{\partial A}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) = \left(-\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R^2} (x - x_p)$$

将上面两式代入式(11.16), 可得

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R^2} \{ \mathbf{e}_x (y - y_p) - \mathbf{e}_y (x - x_p) + \mathbf{e}_z (0) \} \quad (11.20)$$

由于

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ (x - x_p) & (y - y_p) & (z - z_p) \end{vmatrix} \\ &= -\{ \mathbf{e}_x (y - y_p) - \mathbf{e}_y (x - x_p) + \mathbf{e}_z (0) \} \end{aligned} \quad (11.21)$$

所以可将 \mathbf{B} 写成下面的形式:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R} \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \quad (11.22)$$

这个结果表明, 在远离电荷的空间, 磁场方向垂直于电荷运动的方向, 并且垂直于电荷到场点的连线。当 \mathbf{e}_z 和 \mathbf{R} 的夹角接近 90° 时, 矢量叉乘的大小将会增加, 所以, 对于给定的 \mathbf{R} , 在包含电荷并与电荷运动方向相垂直的面上将存在极大值。矢量叉乘项还表明, 在电荷运动的方向上场为零。

利用麦克斯韦第四方程可将磁场描述为

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t \quad (\text{自由空间}) \quad (11.23)$$

为了得出电场 \mathbf{E} , 将上式展开, 即

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix}$$

根据式(11.22), 磁场的 x 分量为

$$B_x = - \left(\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R^2} (y - y_p)$$

磁场的 y 分量为

$$B_y = -\left(\frac{-q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 m}\right) \frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} (x-x_p)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c^2 \left\{ \mathbf{e}_x \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \mathbf{e}_y \left(-\frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{-q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c m} \right) \left\{ \mathbf{e}_x (x-x_p) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} \right) + \right. \\ &\quad \mathbf{e}_y (y-y_p) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} \right) - \\ &\quad \mathbf{e}_z \left[\frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} + (x-x_p) \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} + (y-y_p) \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

完成上述各项微分并代入条件 $R\omega/c \gg 1$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \left(\frac{-q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c m} \right) \left\{ \mathbf{e}_x (x-x_p)(z-z_p) \left(-\frac{\omega}{c} \right) \left[\frac{-\sin[\omega(t-R/c)]}{R^3} + \right. \right. \\ &\quad \mathbf{e}_y (y-y_p)(z-z_p) \left(-\frac{\omega}{c} \right) \left[\frac{-\sin[\omega(t-R/c)]}{R^3} \right] - \\ &\quad \left. \left. \mathbf{e}_z [(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2] \left(-\frac{\omega}{c} \right) \left[\frac{-\sin[\omega(t-R/c)]}{R^3} \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c m} \right) \left(\frac{1}{c} \right) \frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R^3} \{ \mathbf{e}_x (x-x_p)(z-z_p) + \mathbf{e}_y (y-y_p)(z-z_p) - \\ &\quad \mathbf{e}_z [(y-y_p)^2 + (x-x_p)^2] \} \end{aligned}$$

从式(11.21)可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -(y-y_p) & (x-x_p) & 0 \\ (x-x_p) & (y-y_p) & (z-z_p) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x (x-x_p)(z-z_p) + \mathbf{e}_y (y-y_p)(z-z_p) - \mathbf{e}_z [(y-y_p)^2 + (x-x_p)^2] \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E} = \left(\frac{q^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 m} \right) \frac{\cos[\omega(t-R/c)]}{R} \left\{ \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right\} \quad (11.24)$$

式(11.22)和式(11.24)表明, \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场是相互垂直的, 并且它们垂直于方向 \mathbf{R}/R 。在电磁场中, 当电荷按照正弦规律发生振荡时, 横电磁波则从运动电荷出发迅速向外传播, 在包含电荷的面上及垂直于电荷运动方向的面上 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 出现极大值。上述结果仅适用于电荷运动速度比光速 c 小得多的情况及远离电荷 ($R \gg \lambda$) 的情况。

11.2 自由电荷的能量散射

我们已经发现电磁波中的 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场辐射来源于平面电磁波作用下的自由电荷, 在第2章中已经阐明, 坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 代表了场中某一点处 \mathbf{S} 方向的单位面积上的能量流动速率。

式(11.22)和式(11.24)表明, \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的大小随着 $\sin\theta$ 变化, 其中 θ 是 \mathbf{R} 与电荷速度的方向矢量 \mathbf{e}_k 之间的夹角。向量 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 既垂直于 \mathbf{E} 也垂直于 \mathbf{B} , 所以 \mathbf{S} 从电荷出发指向外端, 其方向为 \mathbf{R}/R 。根据电荷从球体中心移动并穿过半径为 R 的球面时的平均速率, 可以计算能量辐射。如图 11.2 所示, 如果球的半径比电荷移动的距离大得多的话, R 可以取为电荷到球面的距离。在球面上一点处的坡印廷矢量为

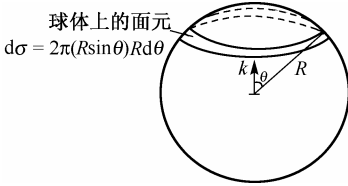


图 11.2 电荷从球体中心移动并穿过球面

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

根据式(11.22)和式(11.24), 可得

$$B = \left(\frac{q^2 E_0}{4\pi \varepsilon_0 c^3 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R} \sin\theta$$

$$E = \left(\frac{q^2 E_0}{4\pi \varepsilon_0 c^2 m} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R} \sin\theta$$

因此

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \left(\frac{q^4 E_0^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^5 m^2} \right) \frac{\cos^2[\omega(t - R/c)]}{R^2} \sin^2\theta \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

\mathbf{S} 的时间平均值可以通过求 $\cos^2[\omega(t - R/c)]$ 的时间平均而得到, 求解过程见附录 A, 其结果为 1/2, 因此坡印廷矢量的时间平均值 \mathbf{S}_{av} 为

$$\mathbf{S}_{av} = \left(\frac{q^4 E_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2} \right) \left(\frac{\sin^2\theta}{R^2} \right) \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

能量穿过一个面积元 $d\sigma$ 的时间平均速率为 $\mathbf{S}_{av} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, 其中 \mathbf{n} 是 $d\sigma$ 的单位法向量, 则能量向外穿过半径为 R 的球面的总的时间平均速率为

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^\pi \left(\frac{q^4 E_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2} \right) \left(\frac{\sin^2\theta}{R^2} \right) 2\pi(R \sin\theta) R d\theta \\ &= \frac{q^4 E_0^2}{16\pi \varepsilon_0 c^3 m^2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = 4/3$$

所以

$$W_0 = \frac{q^4 E_0^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3 m^2} \quad (\text{J/s}) \quad (11.25)$$

由电荷运动所产生的波的坡印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

由于这里的电磁波是在自由空间里传播的横电磁波,坡印廷矢量的时间平均值为

$$S_{\text{av}} = \varepsilon_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \right) (E_0) \left(\frac{1}{c} E_0 \right)$$

$$\text{或记为} \quad W_i = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2 \quad (\text{J/sm}^2) \quad (11.26)$$

这里的 W_i 是由运动电荷所产生的波在单位面积上的能流的时间平均速率。对于电荷 q 来说,总的散射截面积 σ_s 定义为散射流的平均速率 W_0 与入射波单位面积上的能流的时间平均速率 W_i 之比,即

$$\sigma_s = \frac{W_0}{W_i} = \left(\frac{q^4 E_0^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3 m^2} \right) \left/ \left(\frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \right) \right.$$

$$\text{则} \quad \sigma_s = \frac{q^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m^2} \quad (\text{m}^2) \quad (11.27)$$

此式称为自由电荷 q 散射截面的汤姆孙 (Thomson) 公式。

11.3 束缚电荷辐射的散射

在第 3 章给出的简单分子模型中,束缚电荷的运动呈现阻尼振荡的特性,其描述方程为

$$qE = m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z \right)$$

其中随时间变化的电场为

$$E = E_0 \cos \omega t$$

将其代入上式,得

$$\left(\frac{qE_0}{m} \right) \cos \omega t = \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z$$

方程的稳态解为

$$z = \left\{ \left(\frac{qE_0}{m} \right) \left/ \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right. \right\} \cos(\omega t - \beta)$$

$$\text{式中,} \quad \beta = \arctan \left(\frac{\omega \alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

在计算束缚电荷的散射截面时,我们往往只关心能流的时间平均值,而相位角 β 并不重要,于是可以将束缚电荷的位移写成

$$z = \left[\left(\frac{qE_0}{m} \right) \left/ \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right. \right] \cos \omega t \quad (11.28)$$

而自由电荷的相应结果已在式 (11.4) 中给出,即

$$z = -\frac{qE_0}{m\omega^2} \cos \omega t$$

由于我们并不关心相对相位,所以上式中的负号也不重要。对于位移来说,上述两个相似的表达式意味着可以将自由电荷的结果乘上 $\omega^2 / \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$ 后转换为束缚电荷的结果。根据式(11.25),可以将束缚电荷每秒总辐射能的时间平均值写成

$$W'_0 = \left(\frac{q^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3 m^2} \right) \left(\frac{\omega^4}{\omega^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right) \quad (\text{J/s}) \quad (11.29)$$

所以束缚电荷的散射截面 σ'_s 就等于 W'_0 除以入射波单位面积上能流的时间平均速率 W_i , W_i 的值由式(11.26)给出,即

$$W_i = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \quad (\text{J/sm}^2)$$

$$\text{则} \quad \sigma'_s = \left(\frac{q^4}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m^2} \right) \left(\frac{\omega^4}{\omega^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right) \quad (11.30)$$

根据式(11.27),式(11.30)可写成

$$\sigma'_s = \sigma_s \left(\frac{\omega^4}{\omega^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right) \quad (11.31)$$

式中, σ_s 是自由电荷 q 的散射截面。式(11.31)表明,散射截面的最大值发生在束缚电荷的谐振频率处,此时 $\sigma'_s = \sigma_s (\omega_0 / \alpha)^2 \quad (\text{m}^2)$, 在远离谐振频率之处,如果 $\omega \ll \omega_0$ 并且 $\omega \alpha \ll \omega_0^2$, 则散射截面变为

$$\sigma'_s = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \sigma_s \quad (\text{m}^2) \quad (11.32)$$

这正是瑞利散射的结论,在估计液体中的粒子浓度时所进行的浊度测量中,它是一个很重要的结论。将式(11.12)所给定的一般条件应用于这个结论中,可得到特殊的结论,即相比较而言,引起散射的粒子的大小肯定比散射的波长要小得多。

对于束缚电荷散射的分析,并不只局限于原子或分子,电荷 q 的特性模型是普遍适用的,它可以用于一些小粒子的电荷特性分析,如液体中悬浮的生物细胞等。

注意,式(11.32)表示散射与高频有关,散射将随着频率的4次方变化,所以高频情况下将会出现强烈的散射,其波长比粒子直径大得多。如果我们观察小粒子所产生的白光的散射,将会看到高频段(蓝光/紫光)的散射比低频段(红光)的散射要强烈得多,所以散射辐射将会呈现蓝色。在此基础上,瑞利首先解释了天空中的蓝色是由于光在大气中发生散射所造成的。请记住,天空中的光并不直接来自于太阳,如果没有大气散射,天空将是一片黑暗。相反,在太阳落山后,阳光透过增厚的大气,太阳呈现红色,由于存在散射,它所散发出来的光再也显示不出蓝色。

11.4 电偶极子天线的辐射

下面我们来讨论电荷沿着长直导线运动时所产生的辐射。如果将导线从中间断开,并在断开处连接上正弦电流发生器,则导线中的交变电流将形成中心馈电的偶极子天线。通常,

该天线的电场和磁场可根据李纳-维谢尔函数得出, 其中的计算类似于 11.1 节中对振荡自由电荷的计算。

令天线的总长度为 l , 并且设定天线沿着 z 轴放置, 其中心在坐标原点上, 如图 11.3 所示。再设定下列条件:

(1) 电荷沿着天线移动的速度远小于光速 c , 即

$$v \ll c \quad (11.33)$$

(2) 天线长度 l 与天线到场点的距离相比非常小。在这样的条件下, 有 $r \approx R \approx R'$, 这种情况与 11.1 节中将条件表示成为式 (11.12) 中的 $R \ll \lambda$ 和 $L \ll \lambda$ 相类似。在这里, 可以将条件写成

$$\begin{cases} r \approx R \approx R' \\ R \ll \lambda \ll l \end{cases} \quad (11.34)$$

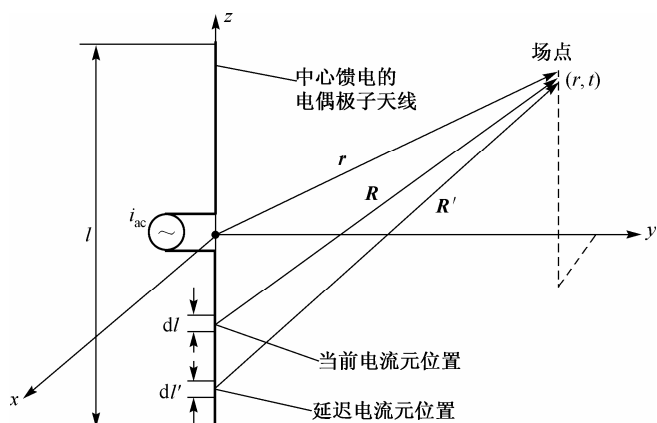


图 11.3 电偶极子天线示意图

(3) 在任意时刻, 沿着天线长度分布的所有点上的电流是相同的, 即

$$I = I_0 \sin \omega t \quad (11.35)$$

场点上总的矢量位是由沿天线长度所取的电流元在场点上的贡献叠加而成的, 每个电流元 dl 都被认为带有以速度 v 移动的电荷 q , 每一个电流元对场点的贡献可通过李纳-维谢尔函数进行计算, 即

$$A(r, t) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \left[\frac{v'(r'_p, t')}{R'(1 - v' \cdot n'_p / c)} \right]$$

在电荷的移动速度远小于光速 c 的情况下, 上式可以写成

$$A(r, t) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \left[\frac{v'(r'_p, t')}{R'} \right]$$

如果取远离天线之处的约束条件 [如式 (11.34) 所描述], 则 $R \approx R'$, 所以

$$A(r, t) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \left[\frac{v'(r'_p, t')}{R} \right]$$

电荷与速度之乘积即为电流, 则有

$$\begin{aligned} q\mathbf{v}'(r'_p, t') &= \mathbf{e}_z I(t') dl = \mathbf{e}_z I_0 \sin\left[\omega\left(t - \left|r - r'_p\right|/c\right)\right] dl \\ &= \mathbf{e}_z I_0 \sin\left[\omega(t - R'/c)\right] dl \end{aligned}$$

如果 $R \gg \lambda \gg l$, 则

$$q\mathbf{v}'(r'_p, t') = \mathbf{e}_z I_0 \sin[\omega(t - R/c)] dl$$

因此

$$\mathbf{A}(r, t) = \mathbf{e}_z \frac{I_0 \sin[\omega(t - R/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} dl$$

在按照天线总的长度对上式求积分时, 可以取 R 为常数, 在所设定的 $R \gg l$ 的条件下, 天线的总的李纳-维谢尔函数为

$$\text{总的 } \mathbf{A}(r, t) = \mathbf{e}_z \frac{I_0 \sin[\omega(t - R/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} l = \mathbf{e}_z I_0 l \frac{\sin[\omega(t - R/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \quad (11.36)$$

这个结果与式(11.13)中所描述的自由电荷的结果非常相似, 将其与式(11.22)和式(11.24)相比较, 用 $(I_0 l \omega)$ 替换 $(q^2 E_0/m)$ 后立即可以得到天线的磁场和电场, 即

$$\mathbf{B} = \left(\frac{I_0 l \omega}{4\pi\epsilon_0 c^3} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R} \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \quad (11.37)$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{I_0 l \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R} \left[\left(\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right] \quad (11.38)$$

式中, $R \gg \lambda \gg l$ 。

结果表明, 在 xOy 平面上, 当 \mathbf{e}_z 与 \mathbf{R}/R 之间的角度为 90° 时, $B = E/c$, 并出现场的最大值(对于给定的 R 值)。在离天线很远处的场, 则是由天线向外辐射的横电磁波形成的, 再次将这些结果与自由电荷的相应结果进行比较, 可以得出天线能流的总的时间平均速率为

$$W = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \text{ (J/s)} \quad (11.39)$$

将式(11.39)与式(11.25)进行比较可知, 这一结果的另一种形式为

$$W = \frac{\pi I_0^2}{3\epsilon_0 c} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \text{ (J/s)} \quad (11.40)$$

11.5 天线的辐射电阻

天线的辐射电阻被定义为是这样一种电阻, 它消耗能量的速率与天线流过相同电流时所消耗能量的速率相等。流过电流为 $I = I_0 \sin \omega t$ 的理想电阻 R_r 消耗能量的速率等于 $\frac{1}{2} I_0^2 R_r$, 使之与式(11.40)中 W 的表达式相等, 可得电偶极子天线的辐射电阻为

$$R_r = \frac{2\pi}{3\omega_0 c} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (11.41)$$

11.6 天线的增益

天线的增益定义为：各向同性辐射器所辐射能量的总时间平均值与特定方向的天线所辐射能量的总时间平均值之比。增益是对天线的有向辐射程度的一种度量，用符号 g 表示，由公式表示为

$$g = 4\pi R^2 \bar{S}_R / W \quad (11.42)$$

式中， \bar{S}_R 是所关心方向上的时间平均坡印廷矢量的大小。对于电偶极子天线， g 是在包含偶极子的平面上的最大辐射值，该平面与偶极子的轴相垂直（见 11.3 节的 xOy 平面）， g 则为

$$g = \frac{(4\pi R^2) \left[\frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right]}{\left[\frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \right]}$$

即

$$g = 3/2$$

这就是电偶极子天线的最大增益值。

11.7 磁偶极子天线的辐射

对电流环辐射的分析，类似于 11.4 节中对电偶极子天线的分析。如图 11.4 所示，假设半径为 a 的电流环置于 xOy 平面，其中心在原点上。由于对称的缘故，不失一般性地可取场点在 yOz 平面上，在这种情况下处理李纳-维谢尔函数中的延迟矢量时必须特别注意，但不管怎样，总的磁矢量位的计算并不困难。

由电流环路所产生的场中某一点的矢量位必定是在一个与环路所构成的平面相平行的平面上，且垂直于矢量 \mathbf{r} 。这是因为具有 y 坐标符号相同、 x 坐标符号相反的两个分量的矢量位叠加（见图 11.5），使得 y 分量相互抵消，而 x 分量则相互叠加。

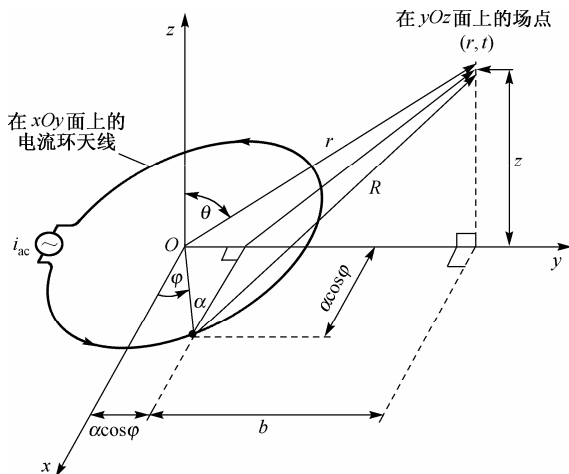


图 11.4 电流环天线示意图

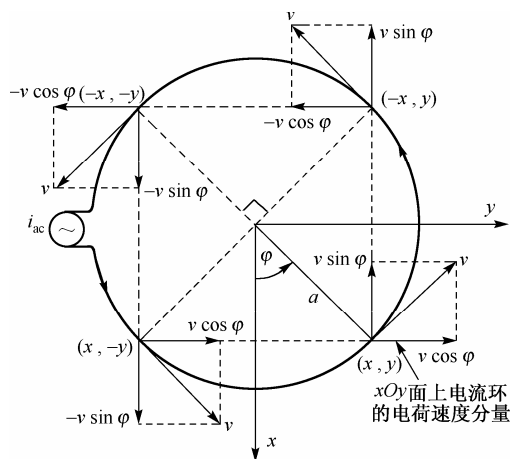


图 11.5 电流环路上场的描述

对于电流环来说, 符号相同的 x 坐标与符号相反的 y 坐标对于点 (r, t) 的距离不同, 故不能相互抵消, 因此点 (r, t) 处的总矢量位 \mathbf{A} 并不为零, \mathbf{A} 的计算与速度项中的 x 分量有关。

根据条件: $v \ll c$, $R \ll \lambda \ll a$, $I = I_0 \sin \omega t$, 则有

$$\text{总的 } \mathbf{A} = (r, t) = \oint_{\text{环路}} \frac{q[\mathbf{v}'(r'_p, t') \sin \varphi \mathbf{e}_x]}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}$$

式中,

$$R = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + z^2 + b^2}$$

根据图11.4, 上式可写成

$$R = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + z^2 + [(r^2 - z^2)^{1/2} - a \sin \varphi]^2}$$

即

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2a(r^2 - z^2)^{1/2} \sin \varphi}$$

由于 $(a/r)^2 \ll 1$, 因此

$$\begin{aligned} R &= r \left[1 - 2a \sin \varphi (r^2 - z^2)^{1/2} / r^2 \right]^{1/2} \\ &= r \left[1 - 2a \sin \varphi (r^2 - z^2)^{1/2} / r^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

所以

$$R \approx r - a \sin \varphi \sin \theta$$

而且

$$1/R \approx 1/r$$

对于电偶极子天线来说, 有

$$q\mathbf{v}'(r'_p, t') = I(t')d\mathbf{l}$$

$$I(t') = I_0 \sin \omega t' = I_0 \sin [\omega(t - R/c)]$$

因此

$$\begin{aligned} \sin \omega t' &= \sin \left[\omega(t - r/c) + \frac{\omega a}{c} \sin \varphi \sin \theta \right] \\ &= \sin [\omega(t - r/c)] \cos \left[\frac{\omega a}{c} \sin \varphi \sin \theta \right] + \cos [\omega(t - r/c)] \sin \left[\frac{\omega a}{c} \sin \varphi \sin \theta \right] \end{aligned}$$

由于 $\omega a/c \approx 0$, 则

$$\sin \omega t' = \sin [\omega(t - r/c)] + \cos [\omega(t - r/c)] \frac{\omega a}{c} \sin \varphi \sin \theta$$

所以, 点 (r, t) 处的总矢量位为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{I_0 \sin \varphi \sin [\omega(t - r/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} + \frac{I_0 (\omega a/c) \sin^2 \varphi \sin \theta \cos [\omega(t - r/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right\} a d\varphi \\ = \mathbf{e}_x \left\{ 0 + \frac{I_0 (\omega a^2/c) \sin \theta \cos [\omega(t - r/c)] \pi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right\} \end{aligned}$$

即

$$\text{总的 } \mathbf{A}(r, t) = \mathbf{e}_x \frac{I_0 (\omega/c) (\pi a^2) \sin \theta \cos [\omega(t - r/c)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (11.43)$$

式中, $r \approx R$ 。

式(11.43)中除了 l 被 $(\pi a^2 \omega/c)$ 替换, 并且多了 $\sin \theta$ 项以外, 其余结果与电偶极子天线的

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \frac{\sin\theta \cos[\omega(t-r/c)](\omega/c)}{r}$$

根据麦克斯韦第四方程(在自由空间)

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$$

可以得到

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \left(\frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \left(\frac{\omega}{c} \right) \left\{ \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin^2 \theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin\theta} \right) (-\sin\theta) \frac{\partial}{\partial r} \{ \sin\theta \cos[\omega(t-r/c)] \} + \mathbf{e}_\varphi (1/r) [0] \right\} \\ &= \left(\frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \left(\frac{\omega}{c} \right) \left\{ \mathbf{e}_r \frac{2 \cos\theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r^2} + \mathbf{e}_\theta \frac{(-\sin\theta) \sin[\omega(t-r/c)](\omega/c)}{r} + \mathbf{e}_\varphi [0] \right\} \end{aligned}$$

再利用远离天线的远区场的条件($r\omega/c \gg 1$), 可以将上式简化为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[-\mathbf{e}_\theta \frac{\sin\theta \sin[\omega(t-r/c)]}{r} \right]$$

因此

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 l \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \mathbf{e}_\theta \frac{\sin\theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r} \right\}$$

综上所述, 在球坐标系中描述的电偶极子天线在远区的辐射场为

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{I_0 l \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \mathbf{e}_\theta \frac{\sin\theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r} \right\} \quad (11.44)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{I_0 l \omega}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left\{ \mathbf{e}_\varphi \frac{\sin\theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r} \right\} \quad (11.45)$$

下面我们来分析磁偶极子天线在球坐标系下的电场和磁场。同样, 为了简捷起见, 取场点在 yOz 平面上。假设电流环置于 xOy 平面, 其中心在原点上, 如图11.7所示。在 11.1 节中已得知, 对置于笛卡儿坐标系中原点处的磁偶极子天线, yOz 平面上一点处的矢量位为

$$\text{总的 } \mathbf{A}(r, t) = -\mathbf{e}_x \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right) \frac{\sin\theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r}$$

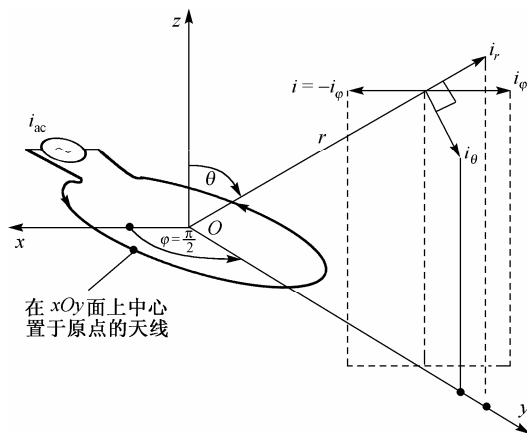


图 11.7 磁偶极子天线

由于此时 $\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_\varphi$ ，故将上式转换到球坐标系下会使分析较为容易，则有

$$\text{总的 } \mathbf{A}(r, t) = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right) \frac{\sin \theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r}$$

在球坐标系下对 \mathbf{A} 取旋度，即可得磁场

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \\ & \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right\} + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{1}{r} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

这样就得到

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right) \left\{ \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin^2 \theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r} \right) \right] + \right. \\ & \left. \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \left[0 - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \{ \sin \theta \cos[\omega(t-r/c)] \} \right] + \mathbf{e}_\varphi (1/r) [0] \right\} \\ = & \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right) \left\{ \mathbf{e}_r \frac{2 \cos \theta \cos[\omega(t-r/c)]}{r^2} + \mathbf{e}_\theta \frac{(-\sin \theta) \sin[\omega(t-r/c)](\omega/c)}{r} + \mathbf{e}_\varphi [0] \right\} \end{aligned}$$

在远离天线的区域 ($r\omega/c \gg 1$)，从上式可得

$$\mathbf{B}(r, t) = - \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right) \frac{\sin \theta \sin[\omega(t-r/c)]}{r} \mathbf{e}_\theta$$

根据麦克斯韦第四方程 (在自由空间)，可知电场与 \mathbf{B} 的关系为

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$$

因为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = & - \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right) \left\{ \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) [0] + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) [0] + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \{ \sin \theta \sin[\omega(t-r/c)] \} \right\} \\ = & - \left(\frac{I_0 \pi a^2 (\omega/c)^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \right) \left\{ \mathbf{e}_\varphi \frac{\sin \theta \cos[\omega(t-r/c)](-\omega/c)}{r} \right\} \end{aligned}$$

所以，电场为

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{I_0 \pi a^2 \omega^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \left\{ \mathbf{e}_\varphi \frac{\sin \theta \sin[\omega(t-r/c)](1/c)}{r} \right\}$$

于是就得到了磁偶极子天线在远区场的结果：

$$\mathbf{E}(r, t) = \left(\frac{I_0 \pi a^2 \omega^2}{4\pi \varepsilon_0 c^3} \right) \left\{ \frac{\sin \theta \sin[\omega(t-r/c)]}{r} \right\} \mathbf{e}_\varphi \quad (11.46)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = - \left(\frac{I_0 \pi a^2 \omega^2}{4\pi \varepsilon_0 c^4} \right) \left\{ \frac{\sin \theta \sin[\omega(t-r/c)]}{r} \right\} \mathbf{e}_\theta \quad (11.47)$$

式中， $r \approx R$ 。

将式(11.46)和式(11.47)与式(11.44)和式(11.45)进行比较可知,从磁偶极子天线辐射的能量 W 的时间平均值可参考描述电偶极子天线的方程式(11.39)得出。对于磁偶极子天线,有

$$W = \frac{I_0^2 \omega^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} (\pi a^2)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (\text{J/s}) \quad (11.48)$$

辐射电阻则为

$$R_r = \frac{8\pi^5 a^4}{3\epsilon_0 c \lambda^4} \quad (11.49)$$

本章小结

1. 在对天线进行分析时,仅仅考虑了离天线比较远的场,即所谓的辐射场或远区场。
2. 我们所讨论的天线被认为是在自由空间中,但实际上处理天线周围物体(如地球、天线支撑系统、附近的建筑物等)的边界条件是很重要的。
3. 本章所得到的结论有一定的波长范围限制,即波长 λ 要比天线的尺寸大得多。
4. 在远离电荷的空间,磁场方向垂直于电荷运动的方向,并且垂直于电荷到场点的连线。
5. 电磁波中的 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场辐射来源于平面电磁波作用下的自由电荷。
6. 散射将随着频率的 4 次方变化,所以高频情况下将会出现强烈的散射,并且其波长比粒子直径大得多。
7. 利用李纳-维谢尔函数可对天线的辐射场进行计算。

习 题 11

- 11.1** 用汤姆孙公式计算:(1) 自由电子的总的散射截面积;(2) 自由质子的总的散射截面积。
- 11.2** 从长度等于十分之一波长的电偶极子天线发射 1 MHz 且功率为 1 kW 的信号需要提供多大的电流?
- 11.3** 根据习题 11.2 所得结果,计算在距离天线 10 km 处的电场最大值为多少?
- 11.4** (1) 取一个半径为 a 、载有恒定电流 I_0 的环形线圈,将其置于 xOy 平面,如果沿 z 轴增加的方向来观察,电流是顺时针流动的,试证明:在 yOz 平面上远离环形线圈的某一点处的磁场为

$$\mathbf{B}(r) = \frac{I_0 a^2 \pi}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{2\cos\theta}{r^3} + \mathbf{e}_\theta \frac{\sin\theta}{r^3} \right\}$$

注意:该推导过程与第 11 章中磁偶极子天线的推导相类似。

- (2) 如果定义电流环的磁偶极矩为 $\mathbf{p}_m = I_0 a^2 \pi \mathbf{e}_z$, 试证明:(1) 中磁场的表达式可等效地写成

$$\mathbf{B}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right\}$$

这个结果与例 2.1 中根据电场的电偶极矩 \mathbf{p}_e 所得出的结果相类似。

附录A 一些有用的数学结论

1. 矢量关系

矢量 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 为单位矢量，其方向分别为 x 、 y 、 z 三个坐标轴的正方向，如图 A.1 所示。任何矢量都可用这些单位矢量来表示，例如矢量 \mathbf{a} 可以表示为

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y + \mathbf{e}_z a_z$$

矢量 \mathbf{a} 的模为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

设矢量 \mathbf{b} 为

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_x b_x + \mathbf{e}_y b_y + \mathbf{e}_z b_z$$

则矢量的加、减运算规则为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e}_x (a_x + b_x) + \mathbf{e}_y (a_y + b_y) + \mathbf{e}_z (a_z + b_z)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{e}_x (a_x - b_x) + \mathbf{e}_y (a_y - b_y) + \mathbf{e}_z (a_z - b_z)$$

矢量的标量积(点乘)为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

式中， θ 为矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 之间的夹角。

矢量的矢量积(叉乘)为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{e}_y (a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{e}_z (a_x b_y - a_y b_x) = \mathbf{C} \text{ (假设)}$$

矢量积的模为

$$C = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$$

式中， θ 为矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 之间的夹角。

矢量 \mathbf{C} 既垂直于 \mathbf{a} 也垂直于 \mathbf{b} ，形同下面 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 与 \mathbf{e}_z 三者之间的矢量积关系：

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z$$

微分算子 ∇ (del) 在笛卡儿坐标系中表示为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

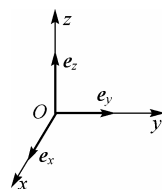


图 A.1 单位矢量 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 在坐标轴上的正方向

该算子如同上面描述的矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 一样,也可进行点乘和叉乘。假设 u 为标量,则算子与 u 的乘积即为 u 的梯度:

$$\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

矢量 \mathbf{a} 的散度定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

矢量 \mathbf{a} 的旋度定义为

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

算子自身的标量积为

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$$

在球坐标系下,矢量 \mathbf{a} 被表述为

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_r a_r + \mathbf{e}_\theta a_\theta + \mathbf{e}_\varphi a_\varphi$$

式中, \mathbf{e}_r 是指向 r 增加方向的单位矢量; \mathbf{e}_θ 是指向 θ 增加方向的单位矢量; \mathbf{e}_φ 是指向 φ 增加方向的单位矢量,如图 A.2 所示。

在球坐标系下,标量 u 的梯度被表述为

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

在球坐标系下,矢量 \mathbf{a} 的散度和旋度被表述为

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right]$$

(1) 标量三重积 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

标量三重积中的括号表示首先要进行矢量积,然后再求 \mathbf{a} 与 $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 的“点乘”。如果 \mathbf{a} 等于 \mathbf{b} 或 \mathbf{c} ,则标量三重积为零,这是因为 $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 所得的结果是一个既垂直于 \mathbf{b} 也垂直于 \mathbf{c} 的矢量,如果这个矢量再与 \mathbf{b} 或 \mathbf{c} 求标量积,则由于二者垂直,所以其结果为零。进一步地,对于任意矢量 \mathbf{c} ,有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) = 0$$

标量三重积中的矢量可以顺序交换位置而结果不变,即

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

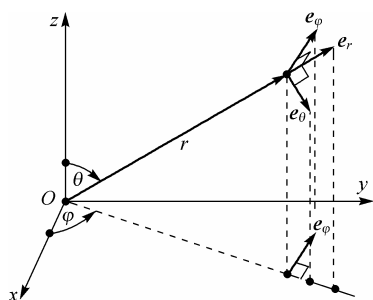


图 A.2 坐标转换的示意图

(2) 矢量三重积 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

矢量三重积中的括号表示首先要进行 $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 的矢量积, 然后再求 \mathbf{a} 与 $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 的“叉乘”。对于任意矢量 \mathbf{c} , 有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{c}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}) - \nabla^2 \mathbf{c}$$

(3) 矢量积分

在各类相关教科书中都可以找到高斯定律和斯托克斯定理及这些定律或定理的证明, 这里只引用其结论。

(a) 高斯定律——也称为散度定理

对于任意矢量 \mathbf{c} , 有

$$\int_S \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{c} dV$$

式中, dV 是表面积 S 所包围的体积 V 中的体积元; \mathbf{n} 是面积元 dS 上指向朝外的单位法向矢量。

(b) 斯托克斯定理

对于任意矢量 \mathbf{c} , 有

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} dS$$

式中, $d\mathbf{r}$ 是面积 S 的边界所构成的闭合曲线 Γ 上的线元; \mathbf{n} 是面积元 dS 上指向朝外的单位法向矢量。

2. 使用雅可比行列式进行坐标转换

在第7章中, 我们使用雅可比行列式将 (x, y, z) 坐标系统下的体积元 dV 转换为 (x', y', z') 坐标系统下的体积元 dV' 。下面以二维情况为例, 介绍其转换过程, (x', y') 坐标系统将与 (x, y) 坐标系统相对应, 如图 A.3 所示。

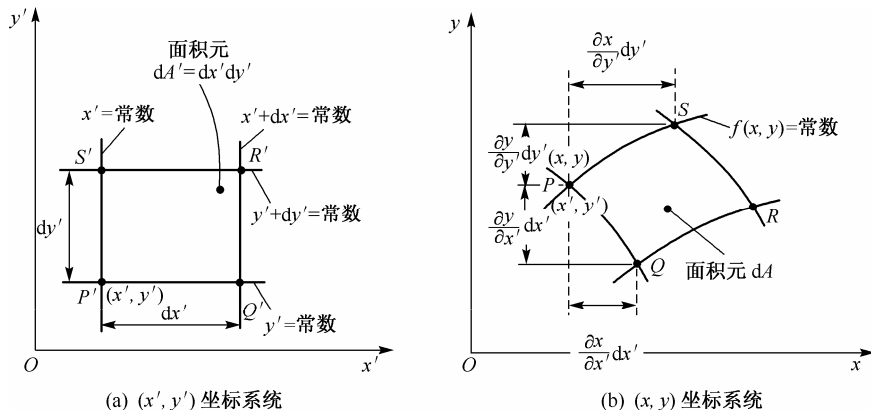


图 A.3 体积元的转换

所需了解的问题是: 微面积元 $dx'dy'$ 如何与 (x, y) 坐标系统中的面积元相对应? 面积元 $dx'dy'$ 中的直线对应于 xOy 平面上的曲线, 例如

$$x' = \text{常数 (在 } x'Oy' \text{ 平面)}$$

对应于

$$f(x, y) = \text{常数 (在 } xOy \text{ 平面)}$$

P' 点的坐标是 (x', y') ，该点对应于 (x, y) 坐标系中的 P 点。假设当从 P' 点移动到 Q' 点时， dx' 仅仅在 x' 方向发生变化，这时有

Q 点的 x 坐标 $= x + dx'$ 仅仅在 x' 方向发生变化时 x 的变化量

$$= x + \frac{\partial x}{\partial x'} dx'$$

Q 点的 y 坐标 $= y + dy'$ 仅仅在 x' 方向发生变化时 y 的变化量

$$= y + \frac{\partial y}{\partial x'} dx'$$

类似地，可以写出 S 点的 (x, y) 坐标为

$$\left(x + \frac{\partial x}{\partial y'} dy', y + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' \right)$$

三角形的面积可以根据其坐标用行列式进行表示，如三角形 PSQ 的面积为

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \left(x + \frac{\partial x}{\partial x'} dx' \right) & \left(y + \frac{\partial y}{\partial x'} dx' \right) & 1 \\ \left(x + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' \right) & \left(y + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' \right) & 1 \end{vmatrix}$$

用第二行减去第一行，并用第三行减去第一行，则行列式的值应保持不变。这时，三角形 PSQ 的面积为

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial x}{\partial x'} dx' & \frac{\partial y}{\partial x'} dx' & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial y'} dy' & \frac{\partial y}{\partial y'} dy' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} dx' dy' \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix}$$

而矩形 dA 的面积则为三角形 PSQ 面积的两倍，即

$$dA = dx' dy' \begin{vmatrix} \partial x / \partial x' & \partial y / \partial x' \\ \partial x / \partial y' & \partial y / \partial y' \end{vmatrix}$$

或者

$$dA = J_J dA'$$

$$J_J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial x' & \partial y / \partial x' & \partial z / \partial x' \\ \partial x / \partial y' & \partial y / \partial y' & \partial z / \partial y' \\ \partial x / \partial z' & \partial y / \partial z' & \partial z / \partial z' \end{vmatrix}$$

3. 标准积分公式

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \pi/2, \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$$

正弦函数平方 [例如 $\sin^2 \omega t$ 、 $\sin^2(\omega t \pm \varphi)$ 或 $\cos^2(\omega t \pm \varphi)$] 的平均值为

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = 1/2$$

式中， T 为周期。

附录B 计算雅可比行列式

计算雅可比行列式，求出 $g = 1 - \mathbf{v}(t') \square \mathbf{n}_p / c$ 。

解：

$$\begin{aligned}
 g &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial x'_p} & \frac{\partial y_p}{\partial x'_p} & \frac{\partial z_p}{\partial x'_p} \\ \frac{\partial x_p}{\partial y'_p} & \frac{\partial y_p}{\partial y'_p} & \frac{\partial z_p}{\partial y'_p} \\ \frac{\partial x_p}{\partial z'_p} & \frac{\partial y_p}{\partial z'_p} & \frac{\partial z_p}{\partial z'_p} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\partial x_p}{\partial x'_p} \left(\frac{\partial y_p}{\partial y'_p} \frac{\partial z_p}{\partial z'_p} - \frac{\partial z_p}{\partial y'_p} \frac{\partial y_p}{\partial z'_p} \right) - \frac{\partial y_p}{\partial x'_p} \left(\frac{\partial x_p}{\partial y'_p} \frac{\partial z_p}{\partial z'_p} - \frac{\partial z_p}{\partial y'_p} \frac{\partial x_p}{\partial z'_p} \right) + \frac{\partial z_p}{\partial x'_p} \left(\frac{\partial x_p}{\partial y'_p} \frac{\partial y_p}{\partial z'_p} - \frac{\partial y_p}{\partial y'_p} \frac{\partial x_p}{\partial z'_p} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{v'_x n'_{px}}{c} \right) \left[\left(1 - \frac{v'_y n'_{py}}{c} \right) \left(1 - \frac{v'_z n'_{pz}}{c} \right) - \left(-\frac{v'_z n'_{py}}{c} \right) \left(-\frac{v'_y n'_{pz}}{c} \right) \right] - \\
 &\quad \left(-\frac{v'_y n'_{px}}{c} \right) \left[\left(-\frac{v'_x n'_{py}}{c} \right) \left(1 - \frac{v'_z n'_{pz}}{c} \right) - \left(-\frac{v'_z n'_{py}}{c} \right) \left(-\frac{v'_x n'_{pz}}{c} \right) \right] + \\
 &\quad \left(-\frac{v'_z n'_{px}}{c} \right) \left[\left(-\frac{v'_x n'_{py}}{c} \right) \left(-\frac{v'_y n'_{pz}}{c} \right) - \left(1 - \frac{v'_y n'_{py}}{c} \right) \left(-\frac{v'_x n'_{pz}}{c} \right) \right]
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 g &= \left(1 - \frac{v'_x n'_{px}}{c} \right) \left[1 - \frac{v'_z n'_{pz}}{c} - \frac{v'_y n'_{py}}{c} + \frac{v'_y v'_z n'_{py} n'_{pz}}{c^2} - \frac{v'_y v'_z n'_{py} n'_{pz}}{c^2} \right] - \\
 &\quad \left(-\frac{v'_y n'_{px}}{c} \right) \left[-\frac{v'_x n'_{py}}{c} + \frac{v'_x v'_z n'_{py} n'_{pz}}{c^2} - \frac{v'_x v'_y n'_{py} n'_{pz}}{c^2} \right] + \\
 &\quad \left(-\frac{v'_z n'_{px}}{c} \right) \left[\frac{v'_x v'_y n'_{py} n'_{pz}}{c^2} + \frac{v'_x n'_{pz}}{c} - \frac{v'_x v'_y n'_{py} n'_{pz}}{c^2} \right] \\
 &= 1 - \frac{v'_z n'_{pz}}{c} - \frac{v'_y n'_{py}}{c} - \frac{v'_x n'_{px}}{c} + \frac{v'_x v'_z n'_{px} n'_{pz}}{c^2} + \frac{v'_x v'_y n'_{px} n'_{py}}{c^2} - \frac{v'_x v'_y n'_{px} n'_{py}}{c^2} - \frac{v'_x v'_z n'_{px} n'_{pz}}{c^2}
 \end{aligned}$$

即

$$g = 1 - \mathbf{v}(t') \square \mathbf{n}'_p / c$$

附录C 矢量 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{M} 之间的关系

电位移矢量(或称为电通量密度矢量) \mathbf{D} 与电场 \mathbf{E} 和极化矢量 \mathbf{P} 的关系为

$$\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

从而可得

$$|\mathbf{D}|/|\mathbf{E}| = \epsilon_0 \epsilon_r$$

在磁性介质中,总电流密度 \mathbf{J} 由电极化电流 \mathbf{J}_b 、传导电流 \mathbf{J}_c 和与介质的磁性相关的电流 \mathbf{J}_m 等几部分电流组成,它们在麦克斯韦方程组中的表示如下式所示。

由

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

变成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}_c}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_b + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_m + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

或者写成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}_c}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

若按照定义极化矢量 \mathbf{P} 的方法类似地将磁化矢量 \mathbf{M} 定义为每单位体积的磁化强度,则可将上述方程写为

$$c^2 \nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{\mathbf{J}_c}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right)$$

或者

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

式中, \mathbf{H} 称为磁场强度,且 $\mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}$ 。

于是有

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

式中, μ 是介电系数。对于铁磁材料来说, μ 不是常数,这表明铁磁材料的 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 之间不是线性关系。

附录D 相关的国际单位

国际单位制中有 7 个基本单位，如表 D.1 所示。

表 D.1 国际单位制的基本单位

量的名称	单位名称	单位符号	量的名称	单位名称	单位符号
长度	米	m	热力学温度	开尔文	K
质量	千克	kg	物质的量	摩尔	mol
时间	秒	s	发光强度	坎德拉	cd
电流	安培	A			

国际单位制中具有专门名称的一些导出单位如表 D.2 所示。

表 D.2 国际单位制中具有专门名称的一些导出单位

量的名称	单位名称	单位符号	量的名称	单位名称	单位符号
电荷量	库仑	C	力	牛顿	N
电流	安培	A	能量	焦耳	J
电容	法拉	F	功率	瓦特	W
电位	伏特	V	电感	亨利	H
电阻	欧姆	Ω	磁感应强度	特斯拉	T
电导	西门子	S			

根据具体量的大小，可用表 D.3 所示的词头与上面的单位相结合。

表 D.3 系数关系

所表示的因数	词头名称	符号
1 000 000 000 000 000 000 = 10 ¹⁸	艾可萨(exa)	E
1 000 000 000 000 000 = 10 ¹⁵	派塔(peta)	P
1 000 000 000 000 = 10 ¹²	太拉(tera)	T
1 000 000 000 = 10 ⁹	吉咖(giga)	G
1 000 000 = 10 ⁶	兆(mega)	M
1 000 = 10 ³	千(kilo)	k
100 = 10 ²	百(hecto)	h
10 = 10 ¹	十(deka)	da
0.1 = 10 ⁻¹	分(deci)	d
0.01 = 10 ⁻²	厘(centi)	c
0.001 = 10 ⁻³	毫(milli)	m
0.000 001 = 10 ⁻⁶	微(micro)	μ
0.000 000 001 = 10 ⁻⁹	纳诺(nano)	n
0.000 000 000 001 = 10 ⁻¹²	皮可(pico)	p
0.000 000 000 000 001 = 10 ⁻¹⁵	非姆托(femto)	f
0.000 000 000 000 000 001 = 10 ⁻¹⁸	阿托(atto)	a

附录E 相关的物理常数

表 E.1 自由空间的常数

常 数	符 号	数 值
光速	c	3×10^8 (m/s)
电容率	ϵ_0	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ (F/m)
磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)
本征阻抗	η_0	120π (Ω)

表 E.2 电子和质子的物理常数

常 数	符 号	数 值
电子的静止质量	m_e	9.107×10^{-31} (kg)
电子的电荷	e	-1.602×10^{-13} (C)
电子的电荷与质量之比	e/m_e	-1.758×10^{11} (C/kg)
电子的半径	R_e	2.81×10^{-15} (m)
质子的静止质量	m_p	1.673×10^{-27} (kg)

表 E.3 材料的相对电容率(介电常数)

材 料	相对电容率 ϵ_r	材 料	相对电容率 ϵ_r	材 料	相对电容率 ϵ_r
空气	1.0	纸	2~4	瓷	5.7
胶木	5.0	粗石蜡	2.2	橡胶	2.3~4.0
玻璃	4~10	有机玻璃	3.4	土壤(干)	3~4
云母	6.0	聚乙烯	2.3	聚四氟乙烯	2.1
油	2.3	聚苯乙烯	2.6	蒸馏水	80

表 E.4 材料的电导率

材 料	电导率 γ /(s/m)	材 料	电导率 γ /(s/m)	材 料	电导率 γ /(s/m)
银	6.17×10^7	黄铜	1.57×10^7	干土	10^{-5}
铜	5.80×10^7	青铜	10^7	变压器油	10^{-11}
金	4.10×10^7	海水	4	玻璃	10^{-12}
铝	3.54×10^7	清水	10^{-3}	瓷	2×10^{-13}
铁	10^7	蒸馏水	2×10^{-4}	橡胶	10^{-15}

表 E.5 材料的相对磁导率

铁磁体(非线性)	相对磁导率 μ_r	顺 磁 体	相对磁导率 μ_r	抗 磁 体	相对磁导率 μ_r
镍	250	铝	1.000 021	铋	0.999 83
钴	600	镁	1.000 012	金	0.999 96
铁(纯)	4000	钨	1.000 82	银	0.999 98
铁镍合金	100 000	钛	1.000 18	铜	0.999 99

表 E.6 材料的磁化率

材 料	磁化率 $\chi_m \times 10^{-5} (20^\circ \text{C})$	材 料	磁化率 $\chi_m \times 10^{-5} (20^\circ \text{C})$	材 料	磁化率 $\chi_m \times 10^{-5} (20^\circ \text{C})$
铋	-16.6	铜	-0.98	铂	26
石英	-6.2	水	-0.91	钴	250×10^5
金	-3.6	氮	-0.5	镍	600×10^5
汞	-2.9	钠	0.62	硅钢片	7000×10^5
银	-2.6	镁	1.2	纯铁	2×10^{10}
铅	-1.8	铝	2.2	玻莫合金	10×10^{10}
锌	-1.4	锂	4.4		
CO ₂	-1.0	钨	6.8		

附录F 中英文术语对照表

A

Ampere 安培
Ampere' s law of force 安培力定律
Ampere' s circuital law 安培环路定律
Antenna 天线
Antenna pattern 天线方向图
Antenna array 天线阵
Angle of incidence 入射角
Angle of reflection 反射角
Angle of refraction 折射角
Anisotropic 各向异性
Aperture antennas 口径天线
Array factor 阵因子
Array factor of uniform linear array 均匀直线
阵的阵因子
Attenuation constant 衰减常数
Attenuation constant in parallel-plate
waveguide 平行波导板的衰减常数
Attenuation constant in rectangular waveguide
矩形波导板的衰减常数

B

Beamwidth 波瓣宽度
Binominal array 二项式阵
Binomial antenna array 二项式天线阵
Biot-Savart' s law 毕奥-萨伐尔定律
Bound charge 束缚电荷
Boundary conditions 边界条件
Boundary-value problems 边值问题
Brewster angle 布儒斯特角
Brillouin diagram 布里渊图
Broadband antenna 宽频带天线
Broadside antenna array 边射天线阵

C

Capacitance 电容
Capacitor 电容器
Capacitance per unit length 单位长度电容
Cartesian coordinate systems 笛卡儿坐标系
Cavity resonators 谐振腔
Charge density 电荷密度
Characteristic impedance 特性阻抗
Characteristic value 特征值
Circulation 环量
Circular waveguide 圆波导
Circularly polarized wave 圆极化波
Coaxial transmission line 同轴传输线
Coersive field intensity 矫顽场强度
Complex permittivity 复电容率
Conductance 电导
Conductivity 电导率
Conduction current 传导电流
Conductance per unit length 单位长度电导
Conduction current density 传导电流密度
Convection current 运流电流
Convection current density 运流电流密度
Conservative field 保守场
Conservation of electric charge 电荷的守恒性
Constitutive relations 本构关系
Coulomb' s law 库仑定律
Critical angle 临界角
Cross product 叉积
Curie temperature 居里温度
Curl 旋度
Current density 电流密度
Cutoff wavelength 截止波长
Cutoff frequency 截止频率
Cylindrical capacitor 圆柱形电容器

Cylindrical coordinates 圆柱坐标系

D

Degenerative mode 简并模

Depth of penetration 穿透深度

Diamagnetism 抗磁性

Dielectrical 介质

Dielectric breakdown 介质击穿

Dielectric strength 介质强度

Differential form 微分形式

Dipole 偶极子

Dipole antenna 振子天线

Dipole moment 偶极矩

Directional pattern 方向图

Directive gain 方向性增益

Directive gain of Hertzian dipole 赫兹偶极子的方向性增益

Directivity 方向性系数

Directivity of half-wave dipole 半波振子的方向性系数

Directivity of aperture radiator 口径辐射器的方向性系数

Dirichlet problems 狄里赫里问题

Dispersion 色散

Displacement current 位移电流

Distributed parameters 分布参数

Distortionless transmission line 无失真传输线

Divergence 散度

Dot product 点积

Double-stub 双短截线

E

E-plane pattern E 面方向图

Effective area 有效面积

Eigenvalue 本征值

Elemental factor 元因子

Electric charge 电荷

Electrolytic current 电解电流

Electric dipole 电偶极子

Electric dipole moment 电偶极矩

Electric displacement 电位移

Electric field intensity 电场强度

Electric flux density 电通密度

Electric hertz potential 电赫兹位

Electric potential 电位

Electrolytic tank 电解槽

Electromagnetism 电磁学

Electromagnetic field 电磁场

Electromagnetic forces 电磁力

Electromagnetic induction 电磁感应

Electromagnetic model 电磁模型

Electromagnetic power 电磁功率

Electromagnetic theory 电磁理论

Electrostatic energy 静电能

Electrostatic energy of continuous charge distribution 连续电荷分布的静电能

Electrostatic energy of discrete charge distribution 离散电荷分布的静电能

Electrostatic energy in terms of field quantities 以场能表示的静电能

Electrostatic forces 静电力

Electromagnetostatic field 静态电磁场

Electromotance or electromotive force 电动势 (简称 emf)

Elemental electric dipole 电基本振子

Elliptically polarized wave 椭圆极化波

Endfire array 端射式天线阵

Energy density 能量密度

Endfire antenna array 端射天线阵

Equation of conductance 连续性方程

Equiangular spiral antenna 等角螺旋天线

Equipotential lines 等位线

Equipotential surfaces 等位面

Equivalent current densities of magnetization 等效的磁化电流密度

Evanescent mode 迅衰模

External inductance 外电感

F	Hysteresis 滞后
Far-zone field 远区场	I
Far-zone fields of electric dipole 电偶极子的远区场	Ideal current source 理想电流源
Far-zone fields of magnetic dipole 磁偶极子的远区场	Ideal voltage source 理想电压源
Farad 法拉(电容的单位)	Impedance 阻抗
Faraday's law of electromagnetic induction 法拉第电磁感应定律	Impedance matching 阻抗匹配
Ferrites 铁氧体	Impedance matched of Transmission line 传输线的阻抗匹配
Ferromagnetism 铁磁体	Impedance transformer 阻抗变换器
Flow source 流量源	Incidence 入射
Flux lines 通量线	Index of refraction 折射率
Forces 力	Inductance 电感
Free space 自由空间	Inductance per unit length 单位长度电感
Frequency-independent antenna 非频变天线	Input impedance 输入阻抗
Frequency-scanning antenna array 频率扫描天线阵	Instantaneous power density 瞬时功率密度
Fresnel's equation 菲涅耳方程	Insulators 绝缘体
Friis transmission formula 佛里伊斯传输公式	Integral form 积分形式
Fundamental Units 基本单位	Internal impedance 内阻抗
G	Internal inductance 内电感
Gauss's law 高斯定律	International system of units 国际单位制
Gradient 梯度	Intrinsic impedance 本征阻抗
Group velocity 群速	Intrinsic impedance of good conductor 良导体的本征阻抗
Guided electromagnetic wave 导行电磁波	Intrinsic impedance of low-loss dielectric 低损耗电介质的本征阻抗
H	Inverse point 反演点
H-plane pattern H 面方向图	Irrotational field 无旋场
Half-wave dielectric window 半波长介质窗	Isotropic 各向同性
Half-wave sections of Transmission line 半波长传输线	J
Harmonic function 调和函数	Joule's law 焦耳定律
Helmholtz equation 亥姆霍兹方程	K
Henry 亨利	Kirchhoff's current law 基尔霍夫电流定律
Hertz dipole 赫兹偶极子	Kirchhoff's voltage law 基尔霍夫电压定律
Hertz potential 赫兹位	L
Homogeneous 均匀	Laplace's equation 拉普拉斯方程
Homogeneous wave equation 齐次波动方程	Laplacian 拉普拉斯算符
	Legendre equation 勒让德方程

Legendre function 勒让德函数
 Legendre polynomials 勒让德多项式
 Lenz' s law 楞次定律
 Line charge density 线电荷密度
 Line integral 线积分
 Linear dipole antenna 线性振子天线
 Linearly polarized wave 线极化波
 Logarithmic spiral antenna 对数螺旋天线
 Log-periodic antenna 对数周期天线
 Longitudinal propagation 纵向传播
 Lorentz' s force equation 洛伦兹力方程
 Lorentz' s gauge 洛伦兹规范
 Loss angle 损耗角
 Lumped parameter 集总参数

M

Magnetic charge 磁荷
 magnetic flux linkage 磁通链
 Magnetic circuits 磁路
 Magnetic dipole 磁偶极子
 Magnetic dipole moment 磁偶极矩
 Magnetic domains 磁畴
 Magnetic energy 磁能
 Magnetic forces 磁力
 Magnetic field intensity 磁场强度
 Magnetic flux 磁通
 Magnetic flux density 磁通密度
 Magnetic force in terms of mutual inductance
 以磁感抗表示的磁力
 Magnetic force in terms of stored magnetic
 energy 以磁储能表示的磁力
 Magnetic materials 磁性材料
 Magnetic materials of antiferrimagnetic 抗铁
 磁性的磁性材料
 Magnetic materials of diamagnetic 抗磁性的磁性
 材料
 Magnetic materials of ferromagnetic 铁磁性的
 磁性材料
 Magnetic materials of paramagnetic 顺磁性的
 磁性材料

Magnetic potential 磁位
 Magnetic susceptibility 磁化率
 Magnetic torque 磁转矩
 Magnetization curve 磁化曲线
 Magnetization vector 磁化强度矢量
 Magnetomotive force or magnetomotive force 磁动势
 (简称 mmf)
 Main beam 主波束(主瓣)
 Main mode 主模
 Main mode for cavity resonator 谐振腔的主模
 Main mode for parallel-plate waveguide 平行
 板波导的主模
 Main mode for rectangular waveguide 矩形波导
 的主模
 Matched condition for Transmission line 传输
 线的匹配条件
 Maxwell' s equations 麦克斯韦方程组
 Medium 媒质
 Method of images 镜像法
 Method of images of point charge and conducting
 plane 点电荷和导体板的镜像法
 Method of images of line charge and conducting
 cylinder 线电荷和圆柱导体的镜像法
 Method of images of point charge and conducting
 sphere 点电荷和导体球的镜像法
 Method of separation of variables 分离变量法
 Metric coefficient 度量系数
 Monopole 单极振子
 Mutual inductance 互电感

N

Near-zone field 近区场
 Neper 奈培(衰耗单位)
 Neumann formula 纽曼公式
 Nonhomogeneous wave equation 非齐次波动方程
 Nonuniform plane wave 非均匀平面波
 Normal component 法向分量

O

Ohm' s law 欧姆定律

Open-circuited 开路

Orthogonal coordinate systems 正交坐标系

P

Parallel-plate capacitor 平行板电容器

Paramagnetism 顺磁性

Permeability 磁导率

Permittivity 电容率

Permittivity of free space 自由空间的电容率

Phase constant 相位常数

Phase constant of good conductor 良导体的相位常数

Phase constant of low-loss dielectric 低损耗电介质的相位常数

Phase constant of transmission line 传输线的相位常数

Phase velocity 相速

Phasors 相量

Plane of incidence 入射面

Plane wave 平面波

Poisson's equation 泊松方程

Polarization 极化

Polarizing angle 极化角

Polarization of plane wave 平面波的极化

Polarization of a uniform plane wave 均匀平面波的极化

Potential 位

Power density 功率密度

Power gain 功率增益

Poynting's theorem 坡印廷定理

Principle of duality 对偶原理

Principle of pattern multiplication 方向图乘积定理

Propagation constant 传播常数

Q

Quantities 量

Quality factor 品质因素(Q)

Quarter-wave transformer 四分之一波长变换器

Quasi-static field 准静态场

R

Radiation efficiency 辐射效率

Radiation field 辐射场

Radiation intensity 辐射强度

Radiation pattern 辐射方向图

Radiation resistance 辐射电阻

Radiation resistance of half-wave dipole 半波偶极子的辐射电阻

Radiation resistance of hertzian dipole 赫兹偶极子的辐射电阻

Radiation resistance of quarter-wave monopole 四分之一波长单极振子的辐射电阻

Receiving antenna 接收天线

Receiving cross section 接收截面

Reciprocity relation 互易关系

Rectangular 矩形

Reflection 反射

Reflection coefficient 反射系数

Reflection coefficient at plane interface 在平面分界面上的反射系数

Reflection coefficient of terminated transmission line 传输线终端的反射系数

Refraction 折射

Relative permittivity 相对电容率

Relaxation time 弛豫时间

Reluctance 磁阻

Remanent flux density or residual flux density 剩余磁通密度

Resistance 电阻

Resistance per unit length 单位长度电阻

Resistivity 电阻率

Retarded potential 滞后位

S

Saturation 饱和

Saturation of magnetic material 磁性材料的饱和

Scalar 标量

Scalar electric potential 标量电位

Scalar magnetic potential 标量磁位

Scalar product 标量积
 Scalar triple product 标量三重积
 Scattering cross section 散射截面
 Self- Inductance 自感
 Semiconductors 半导体
 Series connection of Capacitor 电容器的串联
 Short-circuited 短路
 SI system 国际单位制
 Sidelobes 旁瓣
 Single-stub 单短截线
 Smith chart 史密斯圆图
 Snell' s law of reflection 斯涅耳反射定律
 Snell' s law of refraction 斯涅耳折射定律
 Solenoidal field 管形场
 Source 源
 Source-free 无源
 Spherical capacitor 球形电容器
 Spherical coordinates 球坐标系
 Standing wave 驻波
 Standing-wave ratio 驻波比
 Stokes' s theorem 斯托克斯定理
 Striplines 带状线
 Stub tuner 短截线调谐器
 Surface charge density 面电荷密度
 Surface current density 面电流密度
 Surface impedance 表面阻抗
 Surface integral 面积分
 Surface wave 表面波

T

Tangential component 切向分量
 Tesla 特斯拉
 Time-average power density 时间平均功率密度
 Time-harmonic 时谐
 Time-harmonic electromagnetism 时谐电磁学
 Time-harmonic electromagnetic field 时谐电磁场
 Time-harmonic fields 时谐场
 Torque 转矩
 Total reflection 全反射

Transformer 变压器
 Transformer emf 变压器电动势
 Transmission coefficient 传输系数
 Transmission line 传输线
 Transmission-line equations 传输线方程组
 Transverse electromagnetic(TEM) wave 横电磁波
 Transverse electric(TE) wave 横电波
 Transverse magnetic(TM) wave 横磁波
 Traveling wave 行波
 Traveling-wave Antenna 行波天线
 Triple product 三重积
 Tuners 调谐器
 Two-element antenna array 两元天线阵
 Two-wire transmission line 双线传输线
 Transverse distribution 横向分布

U

Uniform linear antenna array 均匀直线天线阵
 uniform plane wave 均匀平面波
 Uniqueness theorem 唯一性定理
 Units 单位
 Units of derived quantities 导出量单位
 Unit vector 单位矢量
 Universal constants 通用常数

V

Vector 矢量
 Vector addition and subtraction 矢量加法和减法
 Vector identities 矢量恒等式
 Vector product 矢量积
 Vector potential 矢量位
 Velocity 速度
 Velocity of wave propagation 波的传播速度
 Virtual displacement 虚位移
 Volume charge density 体电荷密度
 Volume current density 体电流密度
 Volume integral 体积分
 Vortex source 旋涡源

W		Wavelength	波长		
Wave equation		Wave number	波数		
Wave impedance					
Wavefront				Y	
Waveguide		Yagi-Uda antenna	八木天线		

习题参考答案

第 1 章

1.3 (1) $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$: $3b + 8c = 1$; (2) $\mathbf{A} // \mathbf{B}$: $b = -3, c = -8$

1.4 $a = \pm \frac{3}{5}, b = \mp \frac{4}{5}$

1.5 矢量线方程: $a_1x + a_2y + a_3z = k_1, x^2 + y^2 + z^2 = k_2$

1.6 $a = 2, b = -1, c = -2$

1.7 通量为 $\Phi = 2\pi a^2 h$

1.8 $\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = 3x^2y^2[(9x - x^2)\mathbf{e}_x - 9y\mathbf{e}_y + 4xz\mathbf{e}_z]$

1.10 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

1.11 $\partial\phi/\partial l = 60/\sqrt{17}$

1.12 $x + y + z = \sqrt{3}$

1.13 $\partial\phi/\partial l = 1$

1.14 $\partial\phi/\partial l = 17/3$

1.15 $\partial u/\partial l = 123/\sqrt{314}$

1.16 在 $(0, 0, 0)$ 处的梯度: $\nabla u = 3\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y - 6\mathbf{e}_z$; 在 $(1, 1, 1)$ 处的梯度: $\nabla u = 6\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$

1.23 $I = 2\pi a^5/5$

1.27 (1) $\nabla \square \mathbf{A} = y^2z^3, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_x(2x^2y - x^3) + \mathbf{e}_y(3xy^2z^2 - 2xy^2) + \mathbf{e}_z(3x^2z - 2xyz^3)$

(2) $\nabla \square \mathbf{A} = 3r \cos \varphi, \quad \nabla \times \mathbf{A} = r \cos \varphi \mathbf{e}_r - 2r \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi + r \sin \varphi \mathbf{e}_z$

(3) $\nabla \square \mathbf{A} = 3 \sin \theta + \frac{2}{R^2} \cos \theta, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\cos 2\theta}{R^3 \sin \theta} \mathbf{e}_R + \frac{\cos \theta}{R^3} \mathbf{e}_\theta - \cos \theta \mathbf{e}_\varphi$

1.29 $\phi = -xyz + C$ (C 为常数)

第 2 章

2.1 $|\mathbf{P}_e| = 2.08 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$

2.2 $|\mathbf{E}|_{\max} = 3.7 \times 10^5 \text{ (V/m)} \quad E = 1.4 \times 10^7 \text{ (V/m)}$

2.4 $7.8 \times 10^{-24} \text{ (J)}$

2.7 $\mathbf{J}_d = \mathbf{e}_x 6.68 \times 10^{-11} \cos[117.1 \times (3.22t - z)] \text{ (A/m}^2\text{)}$

2.8 $\mathbf{J}_d = -26.26 \times 10^{-5} \sin(3 \times 10^9 t - 10z) \mathbf{e}_x \text{ (A/m}^2\text{)}; \quad \mathbf{E} = 7.4 \mathbf{e}_x \text{ (V/m)}$

2.11 $\beta = 41.56 \text{ (rad/m)}$

$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{e}_x 498.7 \cos(15\pi x) \sin(6\pi \times 10^9 t - 41.56z) +$

$\mathbf{e}_z 564.7 \sin(15\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - 41.56z) \text{ (V/m)}$

2.12 (1) $\mathbf{H}(r, z, t) = \mathbf{e}_\varphi \frac{5}{4\pi r} \cos(10^8 t - 0.5z) \text{ (A/m)}$

$$(2) \mathbf{J}_S = \mathbf{e}_z 397.9 \cos(10^8 t - 0.5z) \text{ (A/m)}$$

$$(3) i_d = \frac{10}{9} [\cos(10^8 t - 0.5) - \cos(10^8 t)] \text{ (A)}$$

$$2.13 \quad (1) \mathbf{H}(x, z, t) = \mathbf{e}_x \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin[\omega t - k_x x] + \mathbf{e}_z \frac{k_x E_0}{\omega \mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos[\omega t - k_x x] \text{ (A/m)}$$

$$(2) \mathbf{J}_S = \mathbf{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) \text{ (A/m)}$$

$$2.14 \quad (1) \mathbf{E}(z) = \mathbf{e}_x \left[0.03 e^{-i\frac{\pi}{2}} + 0.04 e^{-i\frac{\pi}{3}} \right] e^{-ikz} \text{ (V/m)}$$

$$(2) \mathbf{H}(z) = \mathbf{e}_y k \left[7.6 \times 10^{-5} e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1.01 \times 10^{-4} e^{-i\frac{\pi}{3}} \right] e^{-ikz} \text{ (A/m)}$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_y k \left[7.6 \times 10^{-5} \sin(10^8 \pi t - kz) + 1.01 \times 10^{-4} \cos\left(10^8 \pi t - kz - \frac{\pi}{3}\right) \right] \text{ (A/m)}$$

$$2.15 \quad (1) S = \mathbf{e}_z 1325 [1 + \cos(2\omega t - 0.84z)] \text{ (W/m}^2\text{)}$$

$$(2) S_{av} = 1325 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

$$2.16 \quad P_{av} = \frac{E_0^2}{90} \text{ (W)}$$

$$2.17 \quad (1) z = 0 \text{ 处, } S(0, t) = 0; \quad z = \lambda_0/8 \text{ 处, } S\left(\frac{\lambda_0}{8}, t\right) = -\mathbf{e}_z \frac{E_0^2}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin(2\omega t);$$

$$z = \lambda_0/4 \text{ 处, } S\left(\frac{\lambda_0}{4}, t\right) = 0$$

$$(2) S_{av} = 0$$

$$2.18 \quad P_{av} = 65.1 \text{ (W)}$$

第 3 章

$$3.1 \quad \mathbf{J}_d = -\mathbf{e}_z 1.22 \times 10^{-10} \sin(2\pi \times 50t) \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$3.2 \quad \mathbf{J}_d = \mathbf{e}_x 6.68 \times 10^{-11} \cos[117.1(3.22t - z)]t \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$3.3 \quad (1) \text{ 传导电流 } \mathbf{J}_c = \mathbf{e}_x 60\gamma \cos(10^5 t) \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$(2) \text{ 位移电流 } \mathbf{J}_d = -\mathbf{e}_x 7.97 \times 10^{-5} \sin(10^5 t) \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$(3) \gamma = 1.33 \times 10^{-6} \text{ (S/m)}$$

$$3.4 \quad (1) \mathbf{E}(r, z, t) = \mathbf{e}_r \frac{502}{r} \sin(2\pi z) \sin(4\pi \times 10^8 t) \text{ (V/m)}$$

$$(2) \mathbf{J}_S = \mathbf{e}_z 395.1 \cos(4\pi \times 10^8 t) \text{ (A/m)}$$

$$(3) \rho_S = -0.78 \times 10^{-7} \sin(4\pi \times 10^8 t) \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$(4) \mathbf{J}_d = \mathbf{e}_r 196.6 \cos(4\pi \times 10^8 t) \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$3.5 \quad \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E} = \mathbf{e}_y 6 \times 10^{-9} \sin 9 \times 10^9 t \text{ (A/m}^2\text{)}; \quad \mathbf{J}_d = \mathbf{e}_y 1.19 \times 10^{-6} \cos 9 \times 10^9 t \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$3.6 \quad (1) J_c/J_d = 0.56 \times 10^{16}; \quad (2) J_c/J_d = 0.28 \times 10^3; \quad (3) J_c/J_d = 0.45 \times 10^2$$

$$3.7 \quad (1) \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \frac{10^{-6}}{2\epsilon_0 \omega} \sin(\omega t - 5x); \quad (2) \mathbf{H} = -\mathbf{e}_y \frac{10^{-6}}{2\epsilon_0 \omega^2} \sin(\omega t - 5x);$$

$$(3) \mathbf{J}_d = \mathbf{e}_z 2 \times 10^{-6} \cos(\omega t - 5x), \quad \omega = \frac{\sqrt{5}}{2} c \text{ (rad/s)}$$

$$3.8 \quad (2) \text{ 铜 } \tau = 1.55 \times 10^{-19} \text{ (s)}, \text{ 石墨 } \tau = 3.69 \times 10^{-10} \text{ (s)}$$

$$3.9 \quad (1) \text{ 不满足}; \quad (2) \text{ 满足}; \quad (3) \text{ 满足}$$

3.10 海水: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}(4.5 - \mathbf{i}4)\mathbf{E}$; 铜: 幅值之比 $= 9.75 \times 10^{-10}$, $\nabla \times \mathbf{H} = 5.7 \times 10^7 \mathbf{E}$

3.11 $I_d = C\omega U_m \cos \omega t$ (其中 $C = \epsilon S/d$ 为平行板电容器的电容)

3.12 $\mathbf{J}_d = \frac{25}{\pi}(\mathbf{e}_x \sin 10^3 t - \mathbf{e}_y \cos 10^3 t)$

3.16 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = 0$, $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{J}_{ms}$

3.18 在 $x=0$ 表面, $\mathbf{J}_s = -\mathbf{e}_y H_0 \cos(kz - \omega t)$; 在 $x=a$ 表面, $\mathbf{J}_s = -\mathbf{e}_y H_0 \cos(kz - \omega t)$

第4章

4.1 (2) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 0$

4.3 $\mathbf{B} = -r \sin(at) \mathbf{e}_\phi$; $\mathbf{E} = -\frac{1}{2} r^2 a \cos(at) \mathbf{e}_z$

第5章

5.1 $W = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$

5.2 $(-a, d)$ 处的镜像电荷 $-q$, $(-a, -d)$ 处的镜像电荷 q , $(a, -d)$ 处的镜像电荷 $-q$

5.4 (2) $\mathbf{E} = \frac{-2a^3 Q}{4\pi\epsilon_0 r^3 d^2}(\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta)$

5.5 $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right)$

其中, $R = [x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{1/2}$, $r_1 = [x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{1/2}$

$r_2 = [x^2 + y^2 + (z-b)^2]^{1/2}$, $r_3 = [x^2 + y^2 + (z+b)^2]^{1/2}$

5.6 $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4U_0}{n^2 \pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}$

5.7 $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4U_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}$ (n 为奇数)

5.8 $\phi = U_0 \sin \frac{3\pi x}{a} e^{-\frac{3\pi y}{a}}$

5.9 $\phi = \frac{U_0}{a} y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2U_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}$ (n 为偶数)

5.10 $\phi = \frac{1}{2} U_0 + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin n\varphi$ (n 为奇数)

5.11 $\phi = \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0} r \cos \varphi$, $r < a$; $\phi = \frac{a^2 \rho_{s0}}{2\epsilon_0 r} \cos \varphi$, $r > a$

5.12 球外电位 $\phi = -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 r \cos \theta$;

电场强度 $E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta$, $E_\theta = -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 \sin \theta$

5.13 圆柱内电位和圆柱外电位分别为

$$\phi_1 = -E_0 \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} r \cos \varphi, \quad \phi_2 = -E_0 r \cos \varphi + E_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{a^2}{r} \cos \varphi$$

圆柱内电场强度和圆柱外电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1 = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \cos \varphi \mathbf{e}_r - \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \phi_2 = E_0 \cos \varphi \left(1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_r - E_0 \sin \varphi \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

5.14 介质球内外的电位分别为

$$\phi_1 = -E_0 \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} r \cos \theta, \quad \phi_2 = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

介质球内外电场分别为

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \phi_2 = E_0 \cos \theta \left(1 + 2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \right) \mathbf{e}_r - E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \right) \mathbf{e}_\theta$$

5.15 $\phi = U_0 \frac{a^2}{r^2} \cos \theta$

5.16 矩形区域的格林函数

$$G = \text{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y') \text{sh} \frac{n\pi}{a} y, \quad y \leq y'$$

$$G = \text{sh} \frac{n\pi}{a} y' \text{sh} \frac{n\pi}{a} \pi (b - y), \quad y \geq y'$$

5.17 $G(r, r') = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{R_2 r'}{R_1 a}$

5.18 $\phi = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 d} x^3 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0} \right) x$

第 6 章

6.1 $E_{\max} = 1.58 \times 10^6 \text{ (V/m)}$

6.2 $|\mathbf{E}| = 951 \text{ (V/m)}$

6.3 $\mathbf{H}(z, t) = -\mathbf{e}_x \frac{10^3}{120\pi} \sin(\omega t - \beta z) \text{ (A/m)}$

6.4 波长 $\lambda = 1 \text{ (m)}$, 频率 $f = 300 \text{ (MHz)}$, 相速 $v = c = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$

磁场强度 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y 0.265 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \text{ (A/m)}$

平均能流密度矢量 $\mathbf{S}_{\text{av}} = \mathbf{e}_z 13.26 \text{ (W/m)}$

6.5 $f = 492 \text{ (MHz)}$; $T = 2.03 \text{ (ns)}$; $k = 10.3 \text{ (rad/m)}$ $H_0 = 2.12 \text{ (A/m)}$

6.6 (1) $|\mathbf{E}| = 122.1 \text{ (V/m)}$; (2) $|\mathbf{E}| = 119.5 \text{ (V/m)}$; (3) $|\mathbf{E}| = 117.7 \text{ (V/m)}$

6.7 (1) $k_0 = 0.105 \text{ (rad/m)}$, $y = \left(22.5 \pm n \frac{\lambda}{2} \right) \text{ (m)}$

(2) $\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x 1.508 \times 10^{-3} \cos \left(10^7 \pi t - \frac{\pi}{30} y + \frac{\pi}{4} \right) \text{ (V/m)}$

6.8 (1) $t = (n - m) \times 10^{-4} \text{ (s)}$; (2) $z = 30 \text{ (km)}$

6.9 (1) 传播方向为 \mathbf{e}_z 方向; (2) $f = 3 \text{ (GHz)}$; (3) 左旋圆极化波; (4) 磁场强度

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_x 2.65 \times 10^{-7} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - 20\pi z + \frac{\pi}{2}\right)} + \mathbf{e}_y 2.65 \times 10^{-7} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - 20\pi z)} \text{ (A/m)};$$

(5) $S_{\text{av}} = \mathbf{e}_z 2.65 \times 10^{-11} \text{ (W/m)}$, $P_{\text{av}} = 2.65 \times 10^{-11} \text{ (W/m}^2\text{)}$

6.10 (1) 沿 $-\mathbf{e}_z$ 方向传播的线极化波; (2) 沿 \mathbf{e}_z 方向传播的左旋圆极化波;

(3) 沿 \mathbf{e}_z 方向传播的右旋圆极化波; (4) 沿 \mathbf{e}_z 方向传播的线极化波;

(5) 沿 \mathbf{e}_z 方向传播的左旋椭圆极化波

6.11 (1) $|\mathbf{E}| = 989.7 \text{ (V/m)}$, $|\mathbf{B}| = 3.3 \times 10^{-6} \text{ (T)}$;

(2) 辐射功率 $P = 3.68 \times 10^{26} \text{ (W)}$; (3) $|\mathbf{E}| = 2.12 \times 10^5 \text{ (V/m)}$, $|\mathbf{B}| = 0.707 \times 10^{-3} \text{ (T)}$

6.13 (1) $\mathbf{H} = -\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi} \cos(9 \times 10^9 t + 30z) \text{ (A/m)}$; $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 40 \cos(9 \times 10^9 t + 30z) \text{ (V/m)}$

(2) $f = 1.43 \times 10^9 \text{ (Hz)}$, $\lambda = 0.209 \text{ (m)}$

6.14 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x 150 - \mathbf{e}_z 200) \cos\left(8\pi \times 10^8 t - \frac{8}{3}\pi y + 211^\circ\right) \text{ (V/m)}$

$$\mathbf{H} = (-\mathbf{e}_x 0.531 - \mathbf{e}_z 0.398) \cos\left(8\pi \times 10^8 t - \frac{8}{3}\pi y + 211^\circ\right) \text{ (A/m)}$$

6.15 (1) $|\mathbf{E}| = 100 \text{ (V/m)}$; (2) $|\mathbf{E}| = 100 \text{ (V/m)}$; (3) $|\mathbf{E}| = 163.8 \text{ (V/m)}$; (4) $|\mathbf{E}| = 128.1 \text{ (V/m)}$;

(5) $|\mathbf{E}| = 95.57 \text{ (V/m)}$

6.16 右旋圆极化波: $E_{1x} = 5 \cos(\omega t + 23.1^\circ)$, $E_{1y} = 5 \sin(\omega t + 23.1^\circ)$

左旋圆极化波: $E_{2x} = 5 \cos(\omega t - 83.1^\circ)$, $E_{2y} = 5 \sin(\omega t - 83.1^\circ)$

6.17 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 1.03 A \cos(\omega t - kz + 14.04^\circ) + \mathbf{e}_y 0.43 A \cos(\omega t - kz + 90^\circ) \text{ (V/m)}$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_x 1.15 \times 10^{-3} A \cos(\omega t - kz + 90^\circ) + \mathbf{e}_y 2.73 \times 10^{-3} A \cos(\omega t - kz + 14.04^\circ) \text{ (A/m)}$$

该波为左旋椭圆极化波。

6.18 (1) 相位常数 $\beta = k = 2\pi \text{ (rad/m)}$, 角频率 $\omega = 6\pi \times 10^8 \text{ (rad/s)}$

$$(2) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{120\pi} \left\{ -\mathbf{e}_x 3 \cos[\omega t - 2\pi(0.8x - 0.6y) - 53.1^\circ] - \right. \\ \left. \mathbf{e}_y 4 \cos[\omega t - 2\pi(0.8x - 0.6y) - 53.1^\circ] + \mathbf{e}_z 5 \cos[\omega t - 2\pi(0.8x - 0.6y)] \right\} \text{ (A/m)}$$

$$(3) S_{\text{av}} = \frac{1}{240\pi} (\mathbf{e}_x 40 - \mathbf{e}_y 30) \text{ (W/m}^2\text{)}$$

6.19 $S_{\text{av}} = \mathbf{e}_z E_0^2 \sqrt{\varepsilon/\mu} \text{ (W/m}^2\text{)}$; $S_{\text{lav}} = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\varepsilon/\mu} \text{ (W/m}^2\text{)}$; $S_{\text{2av}} = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\varepsilon/\mu} \text{ (W/m}^2\text{)}$

6.20 $P_{\text{av}} = 13.4 \times 10^{-3} \text{ (W)}$

第7章

7.1 频率上限 $\approx 10^{15} \text{ Hz}$

7.3 (1) 波数 $k = 2\pi \text{ (rad/m)}$, 相速 $v_p = 1.5 \times 10^8 \text{ (m/s)}$, 波长 $\lambda = 1 \text{ m}$, 波阻抗 $\eta = 60\pi \text{ (}\Omega\text{)}$

(2) $|\mathbf{E}(0, 0)| = 8.66 \times 10^{-3} \text{ (V/m)}$

(3) 位置 $z = 15 \text{ m}$

7.4 $f = 25 \times 10^8 \text{ Hz}$, $\mu_r = 1.99$, $\varepsilon_r = 1.13$

7.5 $v = 1.35 \times 10^8 \text{ (m/s)}$, $\varepsilon_r = 4.94$

- 7.6 $\mu_r = 2$, $\varepsilon_r = 8$
- 7.7 $z = 0.424 \text{ m}$
- 7.8 $f = 1 \times 10^9 \text{ Hz}$, $\gamma = 1.12 \times 10^5 \text{ (S/m)}$
- 7.10 $\alpha = 0.0286 \text{ (Np/m)}$, $\beta = 0.0439 \text{ (rad/m)}$, $\lambda = 143.1 \text{ (m)}$, $v = 4.55 \times 10^7 \text{ (m/s)}$,
 $\tilde{\eta} = 480e^{i33.1^\circ} \text{ (}\Omega\text{)}$, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 12.7 \text{ (mV/m)}$
- 7.11 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y 15e^{-0.0025z} \cos(10^8 t - z + 30^\circ) \text{ (A/m)}$
 $|\mathbf{H}| = 14.93 \text{ (A/m)}$
- 7.12 (1) $\mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_x 0.375 + \mathbf{e}_y 0.273 + \mathbf{e}_z 0.886$; (2) $S_{av} = \mathbf{e}_n 44 \text{ (kW/m)}$; (3) $\varepsilon_r = 2.5$
- 7.14 (1) $x = 1.395 \text{ (m)}$; (2) $\tilde{\eta} = 238.4(1 + i0.005) \text{ (}\Omega\text{)}$, $\lambda = 0.063 \text{ (m)}$, $v = 1.897 \times 10^8 \text{ (m/s)}$;
 (3) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_z 0.21e^{-0.497x} \sin(6\pi \times 10^9 t - 31.6\pi x + 60^\circ - 0.0016\pi) \text{ (A/m)}$
- 7.15 (1) $f = 1 \text{ MHz}$ 时, $v = 7.7 \times 10^7 \text{ (m/s)}$, $\lambda = 77 \text{ (m)}$, $z = 287.9 \text{ (m)}$
 (2) $f = 10 \text{ MHz}$ 时, $v = 9.38 \times 10^7 \text{ (m/s)}$, $\lambda = 9.38 \text{ (m)}$, $z = 234.2 \text{ (m)}$
- 7.16 (1) $f = 1 \text{ MHz}$ 时, $\lambda = 1.587 \text{ (m)}$, $\alpha = 1.26\pi$, $\tilde{\eta} = 0.316\pi(1 + i) \text{ (}\Omega\text{)}$
 (2) $f = 100 \text{ MHz}$ 时, $\lambda = 0.149 \text{ (m)}$, $\alpha = 11.96\pi$, $\tilde{\eta} = \frac{42}{\sqrt{1 - i8.9}} \text{ (}\Omega\text{)}$
- 7.17 $l = 0.252 \text{ (mm)}$
- 7.18 $f = 162 \text{ Hz}$
- 7.19 (1) $\lambda = 2.11 \text{ (m)}$, $v = 1.05 \times 10^6 \text{ (m/s)}$
 (2) $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 1.97 \times 10^{-5} \cos(\omega t + 170.74^\circ) \text{ (V/m)}$
 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y 2.10 \times 10^{-5} \cos(\omega t + 215.74^\circ) \text{ (A/m)}$
- 7.20 $v_g = 3.23 \times 10^7 \text{ (m/s)}$

第 8 章

- 8.1 $\delta = 6.4 \times 10^{-7} \text{ m}$
- 8.2 $f = 13.8 \text{ kHz}$; $z = 13.8 \text{ m}$
- 8.3 (1) $f_c = 9 \times 10^6 \text{ Hz}$; (2) $f_c = 2.6 \times 10^{15} \text{ Hz}$
- 8.6 相速 $v_p = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$, 群速 $v_g = 4\sqrt{\frac{\omega}{2\mu\gamma}}$
- 8.7 $f = 1 \times 10^9 \text{ Hz}$, $\gamma = 1.11 \times 10^5 \text{ (S/m)}$
- 8.8 (1) $f = 50 \text{ Hz}$ 时, 对于铜: $Z_0 = 1.85 \times 10^{-6}(1 + i)\Omega$, $\alpha = 107 \text{ (Np/m)}$, $\delta = 9.34 \times 10^{-3} \text{ m}$; 对于银:
 $Z_0 = 1.79 \times 10^{-6}(1 + i)\Omega$, $\alpha = 101.18 \text{ (Np/m)}$, $\delta = 9.08 \times 10^{-3} \text{ m}$
 (2) $f = 1 \text{ GHz}$ 时, 对于铜: $Z_0 = 8.25 \times 10^{-3}(1 + i)\Omega$, $\alpha = 4.79 \times 10^5 \text{ (Np/m)}$,
 $\delta = 2.09 \times 10^{-6} \text{ m}$; 对于银: $Z_0 = 8.01 \times 10^{-3}(1 + i)\Omega$, $\alpha = 4.93 \times 10^5 \text{ (Np/m)}$,
 $\delta = 2.03 \times 10^{-6} \text{ m}$
- 8.9 (1) $\delta = 0.32 \times 10^{-3} \text{ m}$; (2) $R_S = 11.7 \Omega$; (3) $R_d = 3 \Omega$; (4) $P = 13.16 \text{ W}$
- 8.11 $f_{10} = 3 \times 10^9 \text{ Hz} = 3 \text{ GHz}$
- 8.12 $\lambda_{10} = 4 \times 10^{-2} \text{ m} = 4 \text{ cm}$, 相速 $v = 3.46 \times 10^8 \text{ m/s}$, 能流速度 $v_{en} = 2.56 \times 10^8 \text{ m/s}$, 截止频率
 $f_{10} = 7.5 \text{ GHz}$ 、 $f_{01} = 15 \text{ GHz}$

第9章

- 9.1 (a) $\theta_B = 56.67^\circ$; (b) $\theta_B = 53.1^\circ$
- 9.3 在溴化钾中, 反射能量的损失约为 9%; 在氯化银中, 反射能量的损失约为 21%
- 9.5 $\theta_c = 41.1^\circ$
- 9.6 约为 8%
- 9.7 (1) 当满足 $\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = 0.53$, $\theta_1 \geq 32.01^\circ$ 时, 入射波全部折射到媒质 2 中, 媒质 1 中无反射波; (2) 当满足 $\theta_1 \geq \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = 38.68^\circ$ 时, 波全反射; (3) 对 (1), 当 $\theta_1 \geq 58^\circ$ 时, 全部折射, 对 (2), θ_c 不存在, 不能发生全反射。
- 9.8 (1) 发生全反射的条件为 $\theta_1 \geq \theta_c = 38.68^\circ$, 能够发生全反射; (2) 不能发生全折射; (3) 重答 (1): θ_c 不存在, 不能发生全反射, 重答 (2): 不能发生全折射。
- 9.9 (1) $\theta_c = 6.38^\circ$; (2) $R_\perp = e^{i38^\circ}$; (3) $T_\perp = 1.89e^{i19.2^\circ}$
- 9.10 (1) $\theta_c = 45^\circ$; (2) $\theta_1 = 90^\circ$; (3) $R_\parallel = 1$; (4) $T_\parallel = \sqrt{2}$; (5) $\theta_B = 35^\circ$, 因为 $\theta_1 \neq \theta_B$, 所以不满足无反射条件; (6) $v = 2.12 \times 10^8$ (m/s); (7) $v_x = 4.24 \times 10^8$ (m/s); (8) $v_y = 2.45 \times 10^8$ (m/s); (9) 因为 $\theta_1 = \theta_c = 45^\circ$, 并且 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 所以会发生全反射; (10) 由于发生全反射, 所以媒质 2 中 $S_{av} = 0$
- 9.11 $\epsilon_2 = 7.3\epsilon_0$
- 9.12 $\mu_r = 2$, $\epsilon_r = 18$
- 9.13 (1) $\theta_i = \theta_B = 63.4^\circ$; (2) 18%
- 9.14 (1) $v = 1.98 \times 10^8$ (m/s), $\alpha = 3.17 \times 10^{-2}$ (Np/m); (2) 2.8 (dB)
- 9.17 (1) $\theta_i = \theta_B = 57.69^\circ$; (2) $\theta_c = 39.23^\circ$
- 9.18 (1) 水 $\theta_c = 6.38^\circ$, 玻璃 $\theta_c = 19.47^\circ$, 聚苯乙烯 $\theta_c = 38.68^\circ$; (2) 水 $\alpha = 56.2/\lambda$, 玻璃 $\alpha = 17.8/\lambda$, 聚苯乙烯 $\alpha = 7.84/\lambda$; (3) 水 $\theta_B = 6.34^\circ$, 玻璃 $\theta_B = 18.43^\circ$, 聚苯乙烯 $\theta_B = 32^\circ$
- 9.20 (1) $\lambda_1 = 0.5$ m, $\lambda_2 = 1$ m; (2) $\theta_c = 30^\circ$; (3) $\theta_i = \theta_B = 26.57^\circ$
- 9.21 E_x 的相位与 E'_x 的相位相差 $\pi/2$, 影响驻波的波腹或波节的位置
- 9.22 $\theta_c = 41.8^\circ$
- 9.23 (2) 当 $\varphi = \varphi_\parallel - \varphi_\perp = 0$ 时, 线极化; (3) 当 $\varphi = \varphi_\parallel - \varphi_\perp = \pi/2$ 时, 圆极化
- 9.24 平行极化反射波 $E'_{0\parallel} = 0$, 折射波 $E''_{0\parallel} = 0.577$ (V/m); 垂直极化反射波 $E'_{0\perp} = -0.5$ (V/m), 折射波 $E''_{0\perp} = 0.5$ (V/m)
- 9.25 $R_\perp = -0.554$, $T_\perp = 0.446$; $R_\parallel = -0.04$, $T_\parallel = 0.96$

第10章

- 10.1 (1) $Z_0 = 75 \Omega$, $\Gamma = i0.628$ rad/m; (2) $Z_{in} = -i231.5 \Omega$; (3) $L = \frac{\lambda}{4}(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- 10.2 (1) $C_1 = 10$ pF/m, $L_1 = 1.11$ μ H/m; (2) $\beta = 12.86$ rad/m, $Z_0 = 333 \Omega$
- 10.3 (1) 线间距 $D = 25.5$ mm; (2) 外导体的内半径 $b = 3.91$ mm
- 10.4 (1) $Z_0 = 50 \Omega$; (2) 反射系数 $|\rho|_{\min} = 1/3$, 最小驻波比 $S_{\min} = 2$; (3) $z_1 = 0.125\lambda$
- 10.5 (1) 传输线的长度 $z = 0.074\lambda$; (2) 传输线的长度 $z = 0.324\lambda$

- 10.7 (1) $a \geq 0.06 \text{ m}$, $b \leq 0.04 \text{ m}$ 且 $a \leq 2b$; (2) $\lambda_g = 14.29 \text{ cm}$, $Z_{\text{TE}_{10}} = 538.6 \Omega$
- 10.8 (1) $(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}} = 45.72 \text{ mm}$, $(f_c)_{\text{TE}_{10}} = 6.56 \times 10^9 \text{ Hz}$, $(\lambda_g)_{\text{TE}_{10}} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ m}$,
 $Z_{\text{TE}_{10}} = 499.3 \Omega$;
- (2) $(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}} = 91.44 \text{ mm}$, $(f_c)_{\text{TE}_{10}} = 3.28 \times 10^9 \text{ Hz}$, $(\lambda_g)_{\text{TE}_{10}} = 3.176 \times 10^{-2} \text{ m}$,
 $Z_{\text{TE}_{10}} = 399.2 \Omega$, 还能传输的模式为 TE_{10} 、 TE_{20} 、 TE_{30} ;
- (3) $(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}} = 45.72 \text{ mm}$, $(f_c)_{\text{TE}_{10}} = 6.56 \times 10^9 \text{ Hz}$, $(\lambda_g)_{\text{TE}_{10}} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ m}$,
 $Z_{\text{TE}_{10}} = 499.3 \Omega$, 还能传输的模式为 TE_{10} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 、 TM_{11}
- 10.10 该矩形谐振腔的尺寸为 $a \times b \times d = 0.20 \text{ m} \times 0.10 \text{ m} \times 0.23 \text{ m}$
- 10.11 $\varepsilon_r = 1.52$

第 11 章

- 11.1 (1) $\sigma_S = 6.6 \times 10^{-29} \text{ m}^2$; (2) $\sigma_S = 1.96 \times 10^{-35} \text{ m}^2$
- 11.2 $I_0 = 15.9 \text{ A}$
- 11.3 $E_{\max} = 3 \times 10^{-2} \text{ V/m}$

参 考 文 献

- [1] 杨宪章. 工程电磁场. 北京: 中国电力出版社, 2002.
- [2] 陈国瑞. 工程电磁场与电磁波. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [3] 陈重等. 电磁场理论基础. 北京: 北京理工大学出版社, 2003.
- [4] Bhag Singh Guru. Electromagnetic Field Theory Fundamentals. New York: PWS Publishing Company, 1998.
- [5] 高建平等. 电波传播. 西安: 西北工业大学出版社, 2002.
- [6] 余恒清. 电磁场与电磁波解题指南. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [7] 赵家升等. 电磁场与电磁波解题指导. 成都: 电子科技大学出版社, 2000.
- [8] 周克定等(译). 电磁场与电磁波. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [9] 冯恩信等. 电磁场与电磁波(第2版)学习辅导. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
- [10] 邵小桃等(译). 电磁场基础. 北京: 电子工业出版社, 2010.